交大附中
高中数学

知识点+自测题

2025
精编版

目录

第一章 集合与逻辑 3
1.元素与集合 3
2.集合之间的关系 3
3 集合的运算 4
2.下面的命题中，真命题有（） 5
5 反证法 6
5.一些常用的否定形式 6
第二章 等式与不等式 8
1.一元二次方程的解集 8
2.一元二次方程的根与系数关系（韦达定理） 8
4.已知三个不等式： 9
1.一元一次不等式（组） 9
2.一元二次不等式 9
1.判断正误（在括号内打“√”或“×”）. 11
第三章 函数的概念及其基本性质 12
3.1 函数的概念 12
3.2 函数的奇偶性 12
3.3 函数的单调性与最值 13
3.4 函数图像的变换 14
第四章 幂函数、指数函数与对数函数 16
4.1 幂与指数 16
4.2 幂函数 17
4.3 指数函数 18
4.4 对数及其运算 19
4.5 对数函数 20
4.6 用函数的观点求解方程与不等式 21
第五章 导数及其应用 22
5.1 导数的概念及运算 22
5.2 利用导数解决函数的单调性 23
5.3 利用导数解决函数的极值、最值 24
第六章 三角及三角函数、解三角形 25
6.1 任意角的正弦、余弦、正切、余切和诱导公式 25
6.2 常用三角公式及应用 26
6.3 解三角形 27
6.4 三角函数的图像与性质 27
第七章 数列 31
7.1 等差数列 31
7.3 等比 32
7.4 数列的方法与技巧 34
7.5 数学归纳法 38
第八章 平面向量的 38
8.1 平面向量的概念和线性运算 38
8.2 平面向量的数量积 40

8.3　平面向量基本定理与向量的坐标表示 42
第九章　复数 43
9.1　复数的概念及几何意义 43
9.2　复数的运算 43
9.3　实系数一元二次方程 44
第十章　空间直线与平面、简单几何体 45
10.1　平面及其基本性质 45
10.2　直线与直线的位置关系 46
10.3　直线与平面的位置关系 47
10.4　平面与平面的位置关系 49
10.5　简单几何体的结构、体积、表面积 51
10.6　空间向量及其运算 51
10.7　空间向量在立体几何中的应用 53
第十一章　平面直角坐标系中的直线 55
11.1　直线的倾斜角与斜率 55
11.2　直线的方程 56
11.3　两条直线的位置关系 57
11.4　点到直线的距离 58
第十二章　圆锥曲线 59
12.1　圆 59
12.2　椭圆 60
12.3　双曲线 63
12.4　抛物线 64
第十三章　计数原理 66
13.1　排列与组合 66
求解排列应用问题的六种常用方法 66
4、3 名女生和 5 名男生排成一排. 66
13.2　二项式定理 67
第十四章　概率与统计 69
14.1　随机现象、古典概率 69
14.2　随机事件的独立性 71
14.3　条件概率与相关公式 72
14.4　随机变量的分布与特征、常用分布 73
14.5　随机抽样 76
14.6　统计图表 78
14.7　统计估计 79
第十五章　成对数据的统计分析 81
一、变量间的相关关系 81
四、分类变量与列联表 83
五、独立性检验 83

第一章　集合与逻辑

1.元素与集合

（1）集合的元素的性质：确定性、互异性和无序性；

（2）元素与集合的关系：$a \in A$，读作 a 属于集合 A；$a \notin A$，读作 a 不属于集合 A.

②常用的数集：**N** 表示自然数集；**Z** 表示整数集；**Q** 表示有理数集；**R** 表示实数集；$\varnothing$ 表示空集；**C** 表示复数集.

③集合的表示方法：

$$\text{集合}\begin{cases}\text{列举法（多用于有限集）；}\\ \text{描述法（多用于无限集）；}\\ \text{图示法（文氏图）.}\end{cases}$$

例如：①列举法：$\{z,h,a,n,g\}$；②描述法：$\{x|x>1\}$.

2.集合之间的关系

（1）$A \subseteq B$（读作 A 包含于 B）$\Leftrightarrow B \supseteq A$（读作 B 包含 A）$\Leftrightarrow$ 集合 A 是集合 B 的子集；

特别地，$A \subseteq A$；$\begin{cases}A \subseteq B,\\ B \subseteq C\end{cases} \Rightarrow A \subseteq C$.

例：$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$.

（2）$A=B$ 或 $\begin{cases}A \subseteq B,\\ A \supset B\end{cases} \Leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 相等；

（3）$A \subset B \Leftrightarrow$ 集合 A 是集合 B 的真子集.

例：$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

（4）空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

考点自测

1.用列举法表示集合 $\{x|x=\sqrt{a},a<40,x\in\mathbf{N}\}$ 为________.

2.已知集合 $A=\{0,1,2\}$，则集合 $B=\{x-y|x\in A,y\in A\}$ 中元素的个数是________.

3.设集合 $A=\{0,1,2,3\}$，则 A 的非空子集的个数为________.

4.方程组 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ 2x+y-4=0\end{cases}$ 的解集可表示为：

（1）$(1,2)$；　　　　　　　　（2）$\{(1,2)\}$；

（3）$\{(x,y)|x=1,y=2\}$；　　　　（4）$\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$

（5）$\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$，其中正确的为________.

5，设 P,Q 为两个非空集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$.若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是________.

6，设集合 $P=\{x|x>1\}$，$Q=\{x|x^2-x>0\}$，则下列结论正确的是（）

A. $P\subset Q$　　B. $Q\subseteq P$　　C. $P=Q$　　D. $Q\subset P$

3 集合的运算

（1）交集：$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$ 表示集合 A 与集合 B 的交集；

（2）并集：$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$ 表示集合 A 与集合 B 的并集；

（3）补集：设 U 为全集，集合 A 是 U 的子集，则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在全集 U 中的补集，记作 $\overline{A}$，$\overline{A}=\{x|x\in U且x\notin A\}$；

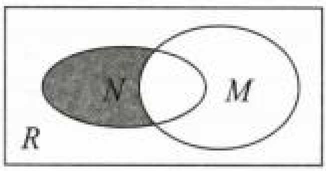
（4）德摩根定律：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

考点自测

1.已知集合 $A=\left\{y\middle|y=2\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]\right\}$，$B=\{-2,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$________.

2.已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{\log_{0.7}(x+1)}\right\}$，集合 $B=\left\{y\middle|y=2^{-x^2+1}\right\}$，则 $A\cup B=$________.

3.已知集合 $M=\{x|y=\lg(x-2)\}$，$N=\{x|x^2-4x<0\}$，且 M、N 都是全集 $\mathbf{R}$ 的子集，则如图所示 Venn 图中阴影部分所表示的集合为________.



4.已知集合 $A=\{(x,y)|x+ay-a=0\}$，$B=\{(x,y)|ax+(2a+3)y-1=0\}$.若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 $a=$（）

A.3　　B.-1　　C.3 或-1　　D.-3 或 1

5.定义 $A-B=\left\{x\middle|x\in A且x\notin B\right\}$，$A*B=(A-B)\cup(B-A)$ 叫做集合的对称差，若集合 $A=\left\{y\middle|y=x+2,-1\le x\le 3\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=\frac{2}{x},\frac{1}{5}\le x\le 1\right\}$，则以下说法错误的是（）

A. $B=[2,10]$　　B. $A-B=[1,2)$

C. $A*B=(1,2]\cup(5,10]$　　D. $A*B=B*A$

4 常用逻辑用语

1.命题

（1）命题是指能判断其真假的语句.

（2）命题有真命题和假命题两类.

2.充分条件与必要条件　　<u>**小充分大必要**</u>

设条件 A 和条件 B，若 $A\Rightarrow B$ 但反之不成立，则 A 是 B 的充分非必要条件；

若 $B\Rightarrow A$ 但反之不成立，则 A 是 B 的必要非充分条件；

若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，即 $A\Leftrightarrow B$，则 A 是 B 的充要条件；

若 $A\Rightarrow B$ 与 $B\Rightarrow A$ 都不成立，则 A 是 B 的既非充分又非必要条件.

3.子集与推出关系

设 $A=\left\{a\middle|a具有性质p\right\}$，$B=\left\{b\middle|b具有性质q\right\}$，

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；

若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件；

若 $A\subset B$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $B\subset A$，则 p 是 q 的必要非充分条件；

若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

考点自测

1.已知命题 p：存在 $x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax+1<0$，若命题 p 是假命题，则实数 a 的取值范围为________.

2.下面的命题中，真命题有（）

① $x\in\mathbf{R}$，若 $x\ge 2$，则 $x^2-3x+2\ge 0$；　　②a，$b\in\mathbf{R}$，若 $a^2+b^2=0$，则 a，b 都为 0；

③两个有理数的和是有理数；　　④ $x>6$ 或 $x<-4$，则 $|x-1|>5$.

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

3.若集合 $A=\{3,a^2\}$，集合 $B=\{2,4\}$，则“$a=2$”是“$A\cap B=\{4\}$”的（）

A.充分非必要条件　　　　B.必要非充分条件

C.充要条件　　　　D.既非充分又非必要条件

4.二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的值恒为正值的充要条件是（）

A. $b^2-4ac>0$　　　　B. $b^2-4ac\geq 0$

C. $a>0$，$b^2-4ac<0$　　　　D. $a\leq 0$，$b^2-4ac<0$

5.已知命题 $p:\dfrac{x-1}{x-2}\geq 2$，命题 $q:|2x-a|<2$，若命题 p 是命题 q 的充分非必要条件，求实数 a 的取值范围.

5 反证法

1.要判断命题“若 α，则 β”是假命题，只要存在一个满足条件 α 但是不满足结论 β 的对象就可以了，要判断命题“若 α，则 β”是真命题，就需要证明所有满足条件 α 的对象都满足结论 β.

2.证明“若 α，则 β”形式的命题时，首先假设结论 β 不成立（β 为假），然后经过正确的逻辑推理得出矛盾，从而说明“β 为假”是不可能发生的，即结论 β 是正确的，这样的证明方法叫反证法.

3.反证法证明一个“若 α，则 β”形式的命题的步骤：

第一步：假设命题的结论 β 不成立；

第二步：经过正确的推理，得出矛盾；

第三步：因此假设不正确，声明结论 β 是成立的.

4.反证法之所以是正确的推理模式，是因为如果假设“β 不成立”是真的，那么经由正确的推理，得到的应该都是真命题，然而一对矛盾不可能都是真命题，所以情况只能是“β 不成立”是假的，也就是“β 是成立的”.

5.一些常用的否定形式

陈述句 α	α 的否定形式
$x>1$	$x\leq 1$
$x>1$ 或 $y>1$	$x\leq 1$ 且 $y\leq 1$
至少有 2 个	最多有 1 个

所有的$a\in A$满足性质p	至少存在一个$a\in A$不满足性质p
所有的$a\in A$不满足性质p	至少存在一个$a\in A$满足性质p

考点自测

1.用反证法证明：存在$x\in\mathbf{R}$，$\cos x\geq 1$，应先假设：________________.

2.已知实数x、y满足$x+y=2$，则下列结论的证明更适合用反证法的是（）

A.证明$xy\leq 1$

B.证明x、y中至少有一个不大于1

C.证明$x^2+y^2\geq 2$

D.证明x、y可能都是奇数

3.用反证法证明命题“已知$x\in\mathbf{R}$，$a=x^2+1$，$b=2x+2$，则a、b中至多有一个不小于0”时，假设正确的是（）

A.假设a、b都不大于0

B.假设a、b至多有一个大于0

C.假设a、b都小于0

D.假设a、b都不小于0

4.A、B、C是$\triangle ABC$的内角，$\alpha=A+B$，$\beta=B+C$，$\gamma=C+A$，则α、β、γ一定（）

A.都大于$\dfrac{2\pi}{3}$　B.都不大于$\dfrac{2\pi}{3}$　C.都小于$\dfrac{2\pi}{3}$　D.有一个不小于$\dfrac{2\pi}{3}$

5・定义方程$f(x)=f'(x)$的实数根x_0叫做函数$f(x)$的“新驻点”.如果函数$g(x)=x$与$h(x)=\ln(x+1)$的“新点”分别为α、β，那么α和β的大小关系是（）

A.$\alpha<\beta$　B.$\alpha=\beta$　C.$\alpha>\beta$　D.不能确定

第二章　等式与不等式

1.一元二次方程的解集

一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根.一元二次方程的解（根）的集合叫做一元二次方程的解集.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的解集由其判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号决定：

（1）当 $\Delta>0$ 时，解集为 $\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$，简记为 $\left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$；

（2）当 $\Delta=0$ 时，解集为 $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$；

（3）当 $\Delta<0$ 时，解集为 $\varnothing$.

2.一元二次方程的根与系数关系（韦达定理）

设 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

3.以 x_1，x_2 为根的一元二次方程是 $(x-x_1)\bullet(x-x_2)=0$，展开代入两根和与两根积，仍得到方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

4.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根为 x_1，x_2，则 $\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

考点自测

1.已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个根为 x_1、x_2，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$________.

2.已知二次函数 $y=x^2-4x+k$ 的图像与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2，且 $\left|x_1-x_2\right|=8$，则 k=________.

3.若 $\tan\alpha$ 、 $\tan\beta$ 是方程 $x^2-6x+7=0$ 的两个根，则 $\tan(\alpha+\beta)=$________.

4.等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_4 与 a_8 是函数 $f(x)=x^2-5x+2$ 的两个零点，则 a_3a_9 的值为________.

5.若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},3\right)$，则 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$ 成立的一个必要非充分条件是（）

A. $-\frac{1}{2}<x<3$　　B. $-\frac{1}{2}<x<0$　　C. $-3<x<\frac{1}{2}$　　D. $-1<x<6$

6.已知关于 x 的一元二次方程 $a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0(a\neq 0,x_1\neq x_2)$ 与关于 x 的一元一次方程

$dx+e=0$ 有一个公共解 $x=x_1$，若一元二次方程 $a(x-x_1)(x-x_2)+(dx+e)=0$ 有两个相等的实数根，则（）

A. $a(x_1-x_2)=d$　　B. $a(x_2-x_1)=d$　　C. $a(x_1+x_2)^2=d$　　D. $a(x_2-x_1)^2=d$

考点自测

1.若 $a<b<0$，则下列不等式中，一定不成立的是（）

A. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$　　D. $|a|>|b|$

2.若 $a>b>0$，$m<0$，则下列不等式成立的是（）

A. $am^2<bm^2$　　B. $\frac{m}{b-a}>1$　　C. $\frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b}$　　D. $\frac{a-m}{a^2}>\frac{b-m}{b^2}$

3.已知 $a<-1<b<0<c<1$，则下列不等式一定成立的是（）

A. $b^2<c<a^2$　　B. $ab+\frac{1}{ab}<c$　　C. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<\frac{1}{c}$　　D. $b^2>ab-bc+ac$

4.已知三个不等式：

（1）$ab>0$；（2）$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$；（3）$bc>ad$.

以其中两个作为条件，余下一个作结论，则组成真命题的个数为（）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

3　一元一次不等式（组）及一元二次不等式的求解

1.一元一次不等式（组）

仅含有一个未知数，并且未知数最高次数是一次的整式不等式叫做一元一次不等式，任何一元一次不等式都可以根据不等式的基本性质化为 $ax>b$ 的形式.

（1）如果 $a>0$，那么 $ax>b$ 的解集为 $\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$；

（2）如果 $a<0$，那么 $ax>b$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{b}{a}\right)$；

（3）如果 $a=0$，$b\geq 0$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$，$b<0$ 时，不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

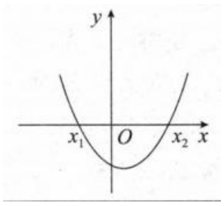
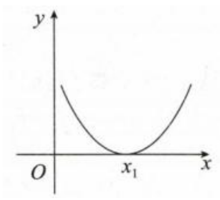
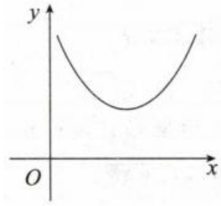
两个或两个以上一元一次不等式组成不等式组，这几个一元一次不等式的解的公共部分叫做这个一元一次不等式组的解.

2.一元二次不等式

一般地，只含有一个未知数且未知数的最高次数为二次的不等式，叫做一元二次不等式.

一元二次不等式的求解

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$	$\Delta=b^2-4ac>0$	$\Delta=b^2-4ac=0$	$\Delta=b^2-4ac<0$

的根的判别式			
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$	有两个不同实根 $x_1<x_2$	有两个相同实根 $x_1=x_2$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$	解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	解集为 $\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$	解集为 (x_1,x_2)	解集为 $\varnothing$	解集为 $\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq 0(a>0)$	解集为 $(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$	解集为 $\mathbf{R}$	解集为 $\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c\leq 0(a>0)$	解集为 $[x_1,x_2]$	解集为 $\{x_1\}$	解集为 $\varnothing$

考点自测

1.已知命题：“存在 $x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax-2\geq 0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

2.集合 $A=\{x|x^2-4x+3\leq 0\}$，$B=\{x|y=\sqrt{2-x}\}$，则 $A\cap B=$________.

3.函数 $f(x)=\log_4(-x^2+2x+3)$ 的单调增区间为________.

4.已知复数 $z=a+(a-4)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$（i 为虚数单位），若 $|z|\leq 2\sqrt{2}$，则实数 a 的值为________.

5.已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 在 $[-1,1]$ 上有实数根，且满足 $0\leq 3b+c\leq 3$，则 b 的取值范围是________.

4　基本不等式及其应用

1.平均值不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

（1）不等式成立的条件：$a>0$，$b>0$.

（2）等号成立的条件：当且仅当 $a=b$ 时取等号.

（3）其中 $\frac{a+b}{2}$ 称为正数 a，b 的算术平均值，$\sqrt{ab}$ 称为正数 a，b 的几何平均值.

基本不等式可以用来求最值，但要注意条件的满足：一正、二定、三相等.

如：已知实数 a，$b>0$，则

若 $ab=p$（常数），则当且仅当 $a=b$ 时，$a+b$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

若 $a+b=s$（常数），则当且仅当 $a=b$ 时，ab 有最大值 $\frac{s^2}{4}$.

2.三角不等式 $|a+b|\le|a|+|b|$，当且仅当 $ab\ge0$ 时等号成立.

考点自测

1.判断正误（在括号内打“√”或“×”）.

（1）当 $a\ge0$，$b\ge0$ 时，$a+b\ge2\sqrt{ab}$.（）

（2）两个不等式 $a^2+b^2\ge2ab$ 与 $a+b\ge2\sqrt{ab}$ 成立的条件是相同的.（）

（3）函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2.（）

（4）函数 $f(x)=\sin x+\frac{4}{\sin x}$ 的最小值为 2.（）

（5）$x>0$ 且 $y>0$ 是 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge2$ 的充要条件.

2.若不等式 $x+2\sqrt{2xy}\le a(x+y)$ 对一切正实数 x，y 恒成立，则实数 a 的最小值为________.

3.已知 $x>-1$，$y>0$ 且满足 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y}$ 的最小值为________.

4.已知实数 a，b，c 成等差数列，则点 $P(2,-1)$ 到直线 $ax+by+c=0$ 的最大距离是（）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.1　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

第三章　函数的概念及其基本性质

3.1　函数的概念

一个 x 对应一个 y 才是函数；函数三要素：定义域 值域 解析式

考点自测

1.判断下列函数是否是相同函数？

（1） $y=\sqrt[5]{x^5}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；（）

（2） $y=\ln e^x$ 与 $y=e^{\ln x}$；（）

（3） $y=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x+3}$ 与 $y=x-1$；（）

（4） $y=x^0$ 与 $y=\dfrac{1}{x^0}$；（）

（5） $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ 与 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$；（）

（6） $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；（）

（7） $f(x)=2x^2-1$ 与 $g(t)=2t^2-1$；（）

（8） $y=\cos x$ 与 $y=\cos|x|$.（）

2.已知 $f(x)=\sqrt{x+2}$， $g(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}}$，则 $f(x)\bullet g(x)=$________.

3.设 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\le 1\\ \log_{81}x, & x>1,\end{cases}$ 且 $f(x)=\dfrac{1}{4}$，则 $x=$________.

4.若函数 $f(x)$ 满足定义域为 D，值域也为 D，就称 $f(x)$ 为“优美函数”.试写出能满足“若 $f(x)$ 是优美函数，则 $f(0)=0$”为假命题的一个函数是________.

5.求下列函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\lg(|x|-x)}$；

（2） $y=\sqrt{\log_{0.5}\dfrac{x-1}{x+5}}+(2x-3)^0$.

3.2　函数的奇偶性

1.偶函数

定义：（1）定义域关于原点对称（2）$f(-x)=f(x)$

性质：（1）图像关于 y 轴对称

2.奇函数

定义：（1）定义域关于原点对称（2）$f(-x)=-f(x)$

性质：（1）图像关于原点轴对称 （2）若 x=0 在定义域内，则 f(0)=0

3.判断函数奇偶性的方法

首先判断定义域是否关于原点对称，再判断 f(x)与 f(-x)的关系，

考点自测

1.若函数 $y=a\cdot 3^x+\frac{1}{3^x}$ 为偶函数，则 a=________.

2.已知函数 $f(x)=g(x)+|2x-1|$ 为奇函数，若 $g(-1)=7$，则 $g(1)=$________.

3.已知 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，那么，不等式 $f(x+2)<5$ 的解集是________.

4.已知 $y=f(x)$ 是偶函数，则函数 $y=f(x+1)$ 的图像的对称轴是直线（）

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x=-\frac{1}{2}$

5.设 $f(x)$ 是 **R** 上的任意函数，则下列叙述正确的是（）

A. $f(x)f(-x)$ 是奇函数　　B. $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

C. $f(x)-f(-x)$ 是偶函数　　D. $f(x)+f(-x)$ 是偶函数

3.3 函数的单调性与最值

1.函数的单调性

（1）单调函数的定义

对于定义在 D 上的函数 $y=f(x)$，设区间 I 是 D 的一个子集，对于区间 I 上的<u>任意</u>给定的<u>两个</u>自变量的值 x_1，x_2 当 $x_1<x_2$ 时，如果总有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数，特别地，如果总有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是严格增函数　　　　<u>**注意有平坦就不严格，没平坦就严格**</u>

2.函数的最值

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值是 $f(x_0)$，对于定义域内任意给定的 x，如果 $f(x)\geq f(x_0)$

都成立，那么 $f(x_0)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的最小值；相反，如果 $f(x)\le f(x_0)$ 都成立，那么 $f(x_0)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的最大值.

考点自测

1.若函数 $f(x)$ 满足“对任意 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$”，则满足 $f(2x-1)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围为________.

2.已知 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$，$x\in[2,6]$，则 $f(x)$ 的最大值为________，最小值为________.

3.若函数 $y=(2k+1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数，则 k 的取值范围是________

4.“$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为严格增函数”的（）

A.充分非必要条件　　B.必要非充分条件

C.充要条件　　D.既非充分又非必要条件

5.已知 x，$y\in\mathbf{R}$，且 $x>y>0$，则（）

A.$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}>0$　　B.$\sin x-\sin y>0$　　C.$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^y<0$　　D.$\ln x+\ln y>0$

6.下列命题中正确的命题是（）

A.若存在 x_1，$x_2\in[a,b]$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则说函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数

B.若存在 $x_i\in[a,b]$（$1\le i\le n$，$n\ge 2$，i、n 为正整数），当 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)<\cdots<f(x_n)$，则说函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数

C.函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，若对任意的 $x>0$，都有 $f(x)>f(0)$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一定是减函数

D.若对任意 x_1，$x_2\in[a,b]$，当 $x_1\ne x_2$ 时，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则说函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数

3.4　函数图像的变换

1.平移变换　　　　左加右减上加下减

（1）水平平移：$y=f(x\pm a)(a>0)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像向左（+）或向右（—）平移 a 个单位而得到.

（2）竖直平移：$y=f(x)\pm b(b>0)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像向上（+）或向下（—）平

移 b 个单位而得到.

2.对称变换

（1）函数 $y=f(-x)$ 的图像，可以将函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称得到.

（2）函数 $y=-f(x)$ 的图像，可以将函数 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称得到.

（3）函数 $y=-f(-x)$ 的图像，可以将函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称得到.

（4）函数 $x=f(y)$ 的图像，可以将函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称得到.

（5）函数 $y=f(2a-x)$ 的图像可以将函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称得到.

3.翻折变换

（1）作出 $y=f(x)$ 的图像，将图像位于 x 轴下方的部分以 x 轴为对称轴翻折到上方，其余部分不变，得到 $y=|f(x)|$ 的图像.

（2）作出 $y=f(x)$ 在 y 轴上及 y 轴右边的图像，并作 y 轴右边的图像关于 y 轴对称的图像，即得 $y=f(|x|)$ 的图像.

4.（1）若 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.特别地当 $a=b=0$ 时，该函数为偶函数；

（2）若 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$ 时，则 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 对称.特别地当 $a=b=0$ 时，该函数为奇函数；

考点自测

1. 作出下列函数的图像：

① $y=\dfrac{x^3}{|x|}$；② $y=\dfrac{x+2}{x-1}$；③ $y=|\lg(x-1)|$.

第四章　幂函数、指数函数与对数函数

4.1　幂与指数

1.指数幂的概念拓展：

（1）正整数指数：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$（$n$ 为正整数）；

（2）零指数：$a^0=1(a\neq 0)$；

（3）负整数指数：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（$a\neq 0$，n 为正整数）；

（4）分数指数：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a>0$，$m$，$n$ 为正整数且 $n>1$）；

（5）$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0$，$m$，$n$ 为正整数，$n>1$）.

2.指数幂运算性质：

对任意给定的正数 a，b 及实数 s，t，有

（1）$a^sa^t=a^{s+t}$；　（2）$\dfrac{a^s}{a^t}=a^{s-t}$；　（3）$(a^s)^t=a^{st}$；　（4）$(ab)^t=a^tb^t$.

3.指数幂的基本不等式定理：

当 $a>1$，$s>0$ 时，$a^s>1$.

1.化简：$\dfrac{(a^{\frac{\sqrt{2}}{3}})^{\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}=$________（其中 $a>0$，$b>0$）.

2.设 $7^{2n-1}+1=8m$（m，n 为正整数），则 $7^{2n+1}+1=8m+$________.

3，若 $a>1$，$b<0$，且 $a^b+a^{-b}=2\sqrt{2}$，则 $a^b-a^{-b}=$________.

4.已知正实数 x，y 满足 $2^x\cdot 4^y=(2^x)^y$，则 $x+y$ 的最小值为________.

5.用分数指数幂表示下列各式（$a>0$，$b>0$）：

（1）$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$；

（2）$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$；

（3）$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$；

（4）$(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}$.

4.2　幂函数

1.幂函数的定义

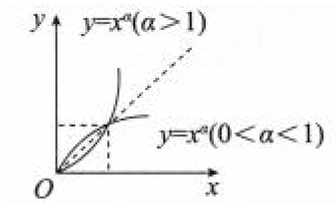
形如 $y=x^{a}$ 的函数称为指数 a 的幂函数.

<u>注意：暴函数的底数是变量 x，系数是 1，高中阶段指数取有理数 a.</u>

2.幂函数的图像与性质

所有的幂函数在 $(0,+\infty)$ 都有定义，并且函数图像都通过点 $(1,1)$.

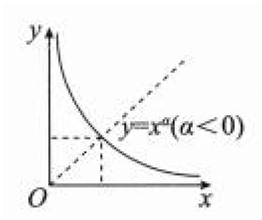
（1）当 $\alpha>0$ 时，如图：



①图像都通过 $(0,0)$ ，$(1,1)$ ；

②在第一象限内，函数值随 x 的增大而增大（增函数）.

（2）当 $\alpha<0$ 时，如图：



①图像都通过点 $(1,1)$ ；

②在第一象限内，函数值随 x 的增大而减小（减函数）;

③在第一象限内，图像向上与 y 轴无限地接近，向右与 x 轴无限地接近.

设幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的指数 $\alpha=\dfrac{q}{p}$，其中 p，q 互素.

当 p 是偶数时， $y=x^{\alpha}$ 的定义域关于原点不对称，故它是非奇非偶函数；

当 p 是奇数时，如果 q 是偶数，那么 $y=x^{\alpha}$ 是偶函数；如果 q 是奇数，那么 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数.

考点自测

1.已知 $\alpha\in\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\right\}$.若函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格减且为偶函数，则 $\alpha=$________.

2.若函数 $f(x)=|m-1|\,x^{m+1}$ 是幂函数，则 m=________.

3.已知 $f(x)=4x^2-mx+5$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，则实数 m 的取值范围是________.

4.幂函数 $f(x)=x^{3m-5}(m\in\mathbf{N})$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(-x)=f(x)$，则 m 等于________.

5.已知幂函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $f(2)=$（）

A.$\dfrac{1}{4}$　　B.4　　C.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sqrt{2}$

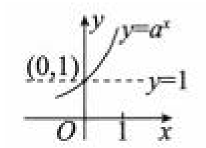
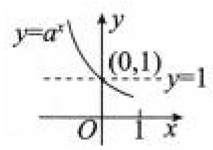
6.已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，若 $f(a+1)<f(10-2a)$，则 a 的取值范围是________.

4.3　指数函数

1.指数函数的定义

形如 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数称为底为 a 的指数函数，其中 x 是自变量，函数定义域为 $\mathbf{R}$.

2.指数函数图像与性质

<table>
<tr><td colspan="2">$y=a^x$</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">性
质</td><td>定义域</td><td colspan="2">$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>过定点</td><td colspan="2">$(0,1)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数</td><td>在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数</td></tr>
<tr><td>函数值的变化特征</td><td>当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$</td><td>当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$</td></tr>
</table>

（1）指数函数的图像都经过点 $(0,1)$，且图像都在第一、二象限；

（2）指数函数都以 x 轴为渐近线（当 $a>1$ 时，图像向左无限接近 x 轴，当 $0<a<1$ 时，图像向右无限接近 x 轴）；

（3）对于相同的 a（$a>0$，且 $a\neq1$），函数 $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称；

（4）指数函数在第一象限按逆时针方向底数依次增大.

考点自测

1.当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，函数 $f(x)=a^{x-2}-3$ 的图像必过定点________.

2.若指数函数 $f(x)=(a-2)^x$ 为减函数，则实数 a 的取值范围为________.

3.设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, x<1, \\ x^{\frac{1}{3}}, x\geq 1, \end{cases}$ 则使得 $f(x)\leq 2$ 成立的 x 的取值范围是________.

4.已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是（）

A. $(-1,1)$ B. $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$ D. $(-\infty,0)\bigcup(1,+\infty)$

4.4 对数及其运算

1.对数的定义：在 $a>0$，$a\neq 1$，且 $N>0$ 的条件下，唯一满足 $a^x=N$ 的数 x，称为 N 以 a 为底的对数，并用符号 $\log_a N$ 表示，而 N 称为真数.

2.指数式与对数式的互化

$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b(a>0,a\neq 1,N>0)$.

3.当 $N>0$ 时，$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

4.对数恒等式

$a^{\log_a N}=N$（$a>0$，且 $a\neq 1$，$N>0$）；$\log_a a^n=n$.

5.对数的四则运算法则

若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，则

（1）$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

（2）$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

（3）$\log_a N^c=c\log_a N(c\in \mathbf{R})$；

（4）$\log_{a^m} N^n=\dfrac{n}{m}\log_a N(n,m\in \mathbf{R})$.

6.常用对数和自然对数

以 10 为底的对数 $\log_{10} x$，叫做常用对数，简记为 $\lg x$.以无理数 e 为底的对数叫做自然对数，记作 $\log_e x$，简记为 $\ln x$，其中 e=2.718⋯.

考点自测

1.已知 x，y 为正实数，则（）

A. $2^{\lg x+\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　　B. $2^{\lg(x+y)}=2^{\lg x}\cdot 2^{\lg y}$

C. $2^{\lg x\cdot\lg y}=2^{\lg x}+2^{\lg y}$　　D. $2^{\lg(xy)}=2^{\lg x}\cdot 2^{\lg y}$

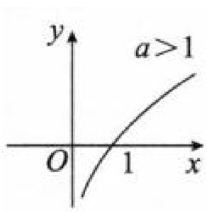
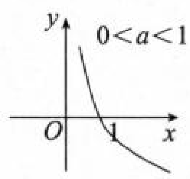
2.已知 $\log_2 9=a$， $\log_2 5=b$ ，则 $\log_2 75$ 用 a，b 表示为（）

A. $2a+2b$　　B. $2a+\frac{1}{2}b$　　C. $\frac{1}{2}(a+b)$　　D. $\frac{1}{2}a+2b$

3.设 $2^x=5^y=m$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$，则 m 的值是________.

4.5　对数函数

1.对数函数的图像与性质

定义		当底数 a 固定，且 $a>0$， $a\neq 1$时，x 以 a 为底的对数 $y=\log_a x$ 称为底为 a 的对数函数	
定义域		$(0,+\infty)$	
值域		$(-\infty,+\infty)$	
图像			
性质	奇偶性	非奇非偶函数	
	单调性	在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数
	范围	当 $x>1$时， $y>0$；当 $0<x<1$时， $y<0$	当 $0<x<1$时， $y>0$；当 $x>1$时， $y<0$
	定点	$(1,0)$	

考点自测

1.函数 $y=\sqrt{1-\log_2\frac{2x-1}{3-x}}$ 的定义域是________.

2.若函数 $y=\lg\left[x^2+(k+2)x+\frac{5}{4}\right]$ 的定义域为 **R**，则 k 的取值范围是________.

3.若函数 $f(x)=\log_a\left(x+\frac{a}{x}-4\right)$（ $a>0$ 且 $a\neq 1$)的值域为 **R**,则实数 a 的取值范围是________.

4.在函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2ax+3)$ 中，若函数在 $(-\infty,1)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是________.

5.函数 $y=\log_2\dfrac{2-x}{2+x}$ 的图像（）

A.关于原点对称 B.关于直线 $y=-x$ 对称

C.关于 y 轴对称 D.关于直线 $y=x$ 对称

6.函数 $y=\log_2|x+1|$ 的单调减区间为________，单调增区间为________.

7.已知函数 $f(x)=|\lg x|$，若 $a\ne b$ 且 $f(a)=f(b)$，则 $a+b$ 的取值范围是（）

A. $(1,+\infty)$ B. $[1,+\infty)$ C. $(2,+\infty)$ D. $[2,+\infty)$

4.6 用函数的观点求解方程与不等式

1.函数的零点

（1）函数零点的定义

如果存在实数 $c\in D$，使得 $f(c)=0$，就把 x=c 叫做该函数的零点.

（2）函数零点与方程根的关系

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

2.零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是一段连续曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上至少存在一个零点.即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

3.二分法

通过每次把 $y=f(x)$ 的零点所在的小区间收缩一半的方法，使区间的两个端点逐步逼近函数的零点，以求得零点的近似值.

考点自测

1.函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点在区间 $(a,a+1)(a\in\mathbf{Z})$ 内，则 a=________.

2.已知函数 $f(x)=x^2+x+a$ 在区间 $(0,1)$ 上有零点，则实数 a 的取值范围是________.

3.函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的零点的个数为（）

A.0 B.1 C.2 D.3

4.函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点个数是（）

A.0 B.1 C.2 D.3

5.若关于 x 的方程 $\sqrt{2x-x^2}-mx-3=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是

6.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x\geq 0,\\ \lg(-x), x<0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $(f(x))^2+f(x)+t=0$ 有三个不同的实根，则 t 的取值范围为____

第五章　导数及其应用

5.1　导数的概念及运算

1.导数的概念

（1）函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，是函数在 $x=x_0$ 附近的平均变化率 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，当 h 趋近于 0 时所趋近的稳定值，记作

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

把自变量 x_0 对应到 $f'(x_0)$ 所给出的函数记作 $y=f'(x)$，称为 $y=f(x)$ 的导函数，简称导数.

2.导数的几何意义

对于曲线 $y=f(x)$，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率.相应地，函数 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

注意：曲线 $y=f(x)$ 过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线，点 P 不一定是切点，切线可能有多条.

3.基本初等函数的导数

原函数	导函数
$f(x)=C$（C 为常数）	$f'(x)=0$
$f(x)=x^\alpha$（α 为常数）	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a(a>0)$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$

4.导数的运算法则

（1）$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$；

（2）$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

（3）$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$，

其中 $g(x)\neq 0$.

5.简单复合函数的导数

（1）$(Cf(x))'=Cf'(x)$；

（2）$(f(ax+b))'=af'(u)$，其中 $u=ax+b$.

考点自测

1.函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数为________.

2.已知 $f(x)=x^2+2xf'(x)$，则 $f'(0)=$________.

3.若 $f(x)=\ln(2x+5)$，则 $f'(x)=$________.

4.已知 $f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-h)}{3h}=$

5.下列各式正确的是（）

A. $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)'=\cos\dfrac{\pi}{3}$　　B. $(\cos x)'=\sin x$　　C. $(\sin x)'=\cos x$　　D. $(x^{-5})'=-5x^{-5}$

6.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足关系式 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，则 $f'(2)=$________.

7.已知函数 $f(x)=x\ln x$.若直线 l 过点 $(0,-1)$，且与曲线 $y=f(x)$ 相切，则直线 l 的方程为________.

8.若函数 $f(x)=x^3-x+3$ 的图像在点 P 处的切线平行于直线 $y=2x-1$，则点 P 的坐标为________.

9.设 P 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上任意一点，求点 P 到直线 $y=x$ 的最小距离.

5.2　利用导数解决函数的单调性

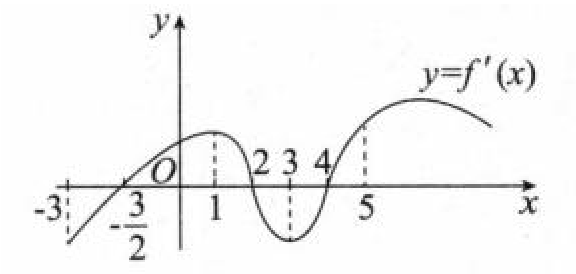
在区间 I 上，若 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在该区间严格增；严格增，则 $f'(x)\geq 0$

考点自测

1.函数 $f(x)=x-\ln x$ 的单调减区间为________.

2.已知函数 $f(x)=x^3-ax$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格增，则实数 a 的最大值是________.

3.已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图所示，则下面关于函数 $y=f(x)$ 的判断正确的是（）



A.在区间 $(-3,1)$ 上 $f(x)$ 严格增　　B.在区间 $(1,3)$ 上 $f(x)$ 严格减

C.在区间 $(4,5)$ 上 $f(x)$ 严格增　　D.在区间 $(3,5)$ 上 $f(x)$ 严格增

4.函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调减区间为（）

A. $(-1,1]$　　B. $(0,1]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

求函数单调区间的步骤：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域.

（2）求 $f'(x)$.

（3）在定义域内解不等式 $f'(x)>0$，得单调增区间.

（4）在定义域内解不等式 $f'(x)<0$，得单调减区间.

5.3　利用导数解决函数的极值、最值

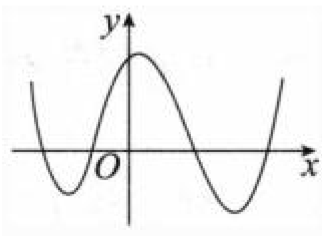
1.函数的极值　　**<u>波峰为极大值点，波谷为极小值点</u>**

考点自测

1.函数 $y=xe^x$ 的最小值是________.

2.函数 $f(x)=x-a\ln x(a>0)$ 的极小值为________.

3.函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f'(x)$ 的图像如图所示，则函数 $f(x)$（）



A.无极大值点、有四个极小值点　　B.有三个极大值点、一个极小值点

C.有两个极大值点、两个极小值点　　D.有四个极大值点、无极小值点

4.设函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，则（）

A. $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大值点　　B. $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点　　D. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

第六章　三角及三角函数、解三角形

6.1　任意角的正弦、余弦、正切、余切和诱导公式

1.角的概念的推广

（1）定义：角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.

（2）分类 $\begin{cases}\text{按旋转方向不同分为正角、负角、零角；}\\ \text{按终边位置不同分为象限角和轴线角.}\end{cases}$

（3）终边相同的角：所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

2.弧度制的定义和公式

（1）定义：把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

（2）公式：

角 α 的弧度数公式	$\lvert\alpha\rvert=\frac{l}{r}$（弧长用 l 表示）
角度与弧度的换算	①$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 弧度； ②1 弧度 $=\frac{180^\circ}{\pi}$
弧长公式	弧长 $l=\lvert\alpha\rvert r$
扇形面积公式	$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\lvert\alpha\rvert r^2$

3.任意角的三角函数

定义：设 $P(x,y)$ 是角 α 终边上异于原点的任一点，其到原点的距离为 r，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}(y\neq0)$.

4.诱导公式　<u>奇变偶不变，符号看象限</u>

3.同角三角函数的基本关系式

（1）平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

（2）商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

（3）倒数关系：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.

提醒：平方关系对任意角α都成立，而商数关系中$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

考点自测

1.设α是第二象限角，$P(x,4)$为其终边上的一点，且$\cos\alpha=\dfrac{1}{5}x$，则$\tan\alpha=$________.

2.设角θ的终边经过点$P(4,-3)$，那么$2\cos\theta-\sin\theta=$________.

3.若$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，则$\tan\alpha=$

4.若$\cos(\pi-\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，且$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则$\sin(\pi+\alpha)=$

6.2　常用三角公式及应用

1.两角和与差的正弦、余弦、正切公式

（1）$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

（2）$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

（3）$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

2.二倍角的正弦、余弦、正切公式

（1）$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

（2）$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

（3）$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

3.辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$（其中$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$）

考点自测

1.已知$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，且$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值为

2.已知$\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则$\sin(\alpha+\beta)=$________.

3.已知$\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，则$\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

4.已知$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，则$\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-2\alpha\right)=$________.

6.3 解三角形

1.正弦、余弦定理

在△*ABC* 中，若角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别是 *a*，*b*，*c*，*R* 为△*ABC* 外接圆的半径，则有

定理	正弦定理	余弦定理
内容	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$； $b^2=a^2+c^2-2ca\cos B$； $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
变形	（1）$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$； （2）$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$； （3）$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2R$	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$； $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$； $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

提醒：在△*ABC* 中，已知两边和其中一边的对角，求第三边时，使用余弦定理比使用正弦定理更简洁.

2.三角形中常用的面积公式

（1）$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$（h_a 表示边 *a* 上的高）；

（2）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$；

（3）$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$（*r* 为三角形内切圆的半径）.

考点自测

1.已知△*ABC* 中，角 *A*、*B*、*C* 所对的边分别为 *a*、*b*、*c*，若 $A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{4}$，$a=1$，则 $b=$________.

2.在△*ABC* 中，*AB*=5，*AC*=3，*BC*=7，则∠*BAC*=________.

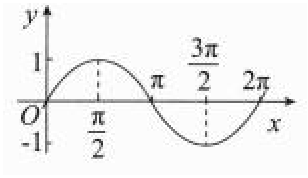
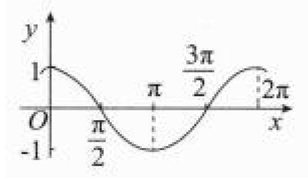
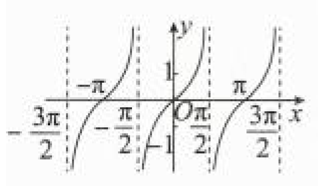
3.在△*ABC* 中，$a\cos A=b\cos B$，则这个三角形的形状为________.

4.在△*ABC* 中，内角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，已知 *a*=4，*c*=6，*C*=2*A*，则 $\cos A=$________，*b*=________.

6.4 三角函数的图像与性质

正弦函数、余弦函数和正切函数的图像与性质

性质 函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$

图像			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left\{x \mid x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
最值	当 $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$ 时，y 取最大值为 1； 当 $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$ 时，y 取最大值为-1.	当 $x = 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ 时，y 取最大值为 1； 当 $x = 2k\pi + \pi(k \in \mathbf{Z})$ 时，y 取最大值为-1.	既无最大值也无最小值
周期性	最小正周期 $T = 2\pi$	最小正周期 $T = 2\pi$	最小正周期 $T = \pi$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right](k \in \mathbf{Z})$ 上为严格增函数； 在 $\left[2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right](k \in \mathbf{Z})$ 上为严格减函数.	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上为严格增函数； 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi](k \in \mathbf{Z})$ 上为严格减函数.	在 $\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)(k \in \mathbf{Z})$ 上为严格增函数.
对称性	对称中心 $(k\pi, 0)(k \in \mathbf{Z})$ 对称轴 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$	对称中心 $\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}, 0\right)(k \in \mathbf{Z})$ 对称轴 $x = k\pi(k \in \mathbf{Z})$	对称中心 $\left(\dfrac{k\pi}{2}, 0\right)(k \in \mathbf{Z})$ 无对称轴

[常用结论]

1.对称与周期

（1）正弦曲线、余弦曲线相邻两对称中心、相邻两对称轴之间的距离是半个周期，相邻的对称中心与对称轴之间的距离是 $\dfrac{1}{4}$ 个周期.

（2）正切曲线相邻两对称中心之间的距离是半个周期.

2.函数具有奇、偶性的充要条件

（1）函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)(x \in \mathbf{R})$ 是奇函数 $\Leftrightarrow \varphi = k\pi(k \in \mathbf{Z})$；

（2）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数 $\Leftrightarrow \varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$；

（3）函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数 $\Leftrightarrow \varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$；

（4）函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数 $\Leftrightarrow \varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

考点自测

1. $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的单调减区间是________.

2.函数 $y=3-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为________，此时 x=________.

3.已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}$，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上的值域是

____

4.若函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格减，则 ω 的取值范围是_________.

5.若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，则 $\omega=$（）

A.2　　B.$\dfrac{3}{2}$　　C.1　　D.$\dfrac{1}{2}$

对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，令 $t=\omega x+\varphi$，求出 t 的范围，再根据 $y=\sin t$ 的图像求 $\sin t$ 的值域，这是常用的方法.

6.5　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像

1. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的有关概念

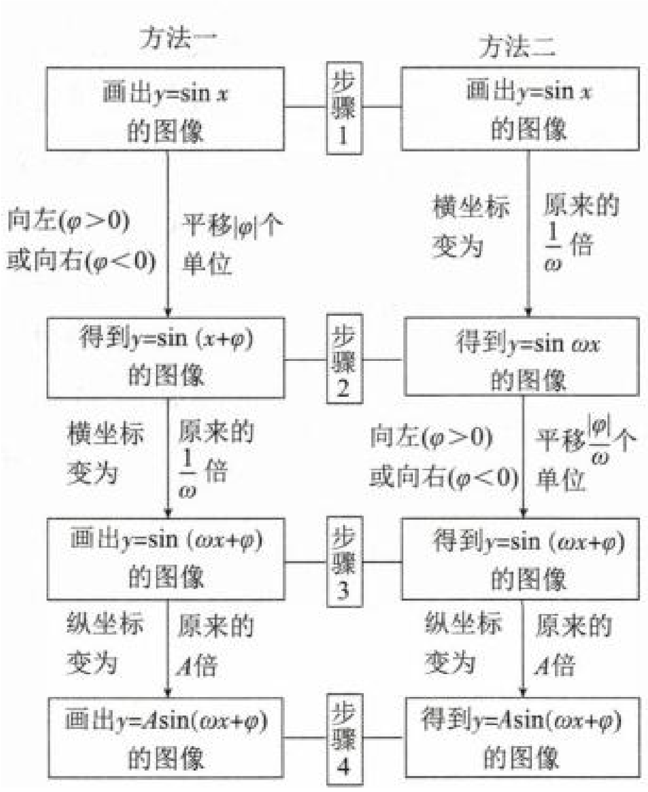
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	振幅	周期	频率	相位	初相
$(A>0,\omega>0)$	A	$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$	$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$	$\omega x+\varphi$	φ

2.用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 一个周期内的简图

用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 一个周期内的简图时，要找五个关键点，如下表所示：

x	$-\dfrac{\varphi}{\omega}$	$-\dfrac{\varphi}{\omega}+\dfrac{\pi}{2\omega}$	$\dfrac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{3\pi}{2\omega}-\dfrac{\varphi}{\omega}$	$\dfrac{2\pi-\varphi}{\omega}$
$\omega x+\varphi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	0	A	0	$-A$	0

3.由函数 $y=\sin x$ 的图像变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像的步骤



考点自测

1. $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$的振幅、频率和初相分别为（）

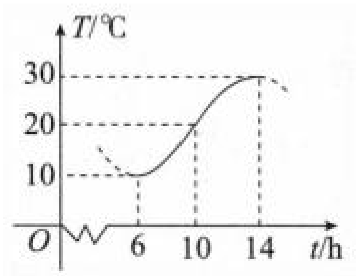
A.2，4π，$\frac{\pi}{3}$　　B.2，$\frac{1}{4\pi}$，$\frac{\pi}{3}$　　C.2，$\frac{1}{4\pi}$，$-\frac{\pi}{3}$　　D.2，4π，$-\frac{\pi}{3}$

2.为了得到函数$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像，可以将函数$y=2\sin 2x$的图像（）

A.向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位　　B.向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位

C.向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位　　D.向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位

3.如图，某地一天6~14时的温度变化曲线近似满足函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$，则这段曲线的函数解析式为________.



典例探究·提能力

4.已知函数$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

（1）用“五点法”作出它在一个周期内的图像；

（2）说明 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像可由 $y=\sin x$ 的图像经过怎样的变换而得到.

第七章　数列

7.1　等差数列

1.等差数列

（1）定义：一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与其前一项的差都等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用小写字母 d 表示.数学语言表示为 $a_{n+1}-a_n=d$ （n 为正整数），d 为常数.

（2）等差中项：数列 a，A，b 成等差数列的充要条件是 $A=\dfrac{a+b}{2}$，其中 A 叫做 a 与 b 的等差中项.

2.等差数列的有关公式

（1）通项公式： $a_n=a_1+(n-1)d$.

（2）前 n 项和公式： $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

3.等差数列的通项公式及前 *n* 项和公式与函数的关系

（1）当 $d\neq 0$ 时，等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=dn+(a_1-d)$ 是关于 n 的一次函数.

（2）当 $d\neq 0$ 时，等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$ 是关于 n 的二次函数.

4.等差数列的前 *n* 项和的最值

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1>0$， $d<0$，则 S_n 存在最大值；若 $a_1<0$， $d>0$，则 S_n 存在最小值.

5.等差数列的通项公式的常用性质

（1）通项公式的推广： $a_n=a_m+(n-m)d$ （n，m 为正整数）.

（2）若 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ （m，n，p，q 为正整数）.

（3）若 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，则 a_k， a_{k+m}， a_{k+2m}，…（k，m 为正整数）是公差为 md 的等差数列.

6. a_n 与 S_n 的关系

若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，则$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}(n\geq 2),\\ S_1(n=1).\end{cases}$

特别地，若a_1满足$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，则不需要分段.

考点自测

已知S_n求a_n的 3 个步骤

（1）利用$a_1=S_1$，求出a_1.

（2）当$n\geq 2$时，利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$求出a_n的表达式.

（3）看a_1是否符合$n\geq 2$时a_n的表达式，如果符合，则可以把数列的通项公式合写；

否则应写成分段的形式，即$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}(n\geq 2),\\ S_1(n=1).\end{cases}$

考点自测

1.设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为S_n，T_n，若对任意的正整数 n，都有$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n-3}{4n-3}$，则$\dfrac{a_2}{b_3+b_{13}}+\dfrac{a_{14}}{b_5+b_{11}}$的值为（）

2.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_5=7$，$S_{10}=21$，则S_{15}等于________.

3.等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_8=10$，$a_{10}=6$，则公差 d 等于________.

4.设数列$\{a_n\}$是等差数列，其前 n 项和为S_n，若$a_6=2$且$S_5=30$，则S_8等于________.

5.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=n^2+1$，则$a_n=$________.

6.若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$S_n\neq 0(n\geq 1)$，且满足$a_n+2S_nS_{n-1}=0(n\geq 2)$，$a_1=\dfrac{1}{2}$.

（1）求证：$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$成等差数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7.3 等比

1.等比数列的有关概念

（1）定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与其前一项的比都等于同一个非零常数，这个数列就叫做等比数列.这个常数叫做等比数列的公比，通常用小写字母 q 表示，定义的数

学表达式为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（n为正整数，$q\neq 0$）.

（2）等比中项：如果a，G，b成等比数列，那么G叫做a与b的等比中项.即G是a与b的等比中项$\Leftrightarrow a$，G，b成等比数列$\Leftrightarrow G^2=ab$.

2.等比数列的有关公式

（1）通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$.

（2）前n项和公式：$S_n=\begin{cases} na_1(q=1), \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1). \end{cases}$

特别的，当$0<|q|<1$时，以a为首项、q为公比的等比数列，有$\sum_{i=1}^{+\infty}aq^{i-1}=\frac{a}{1-q}$.

3.等比数列的常用性质

（1）在等比数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q=2k$（m,n,p,q,k为正整数），则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q=a_k^2$.

（2）若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$（项数相同）是等比数列，则$\{\lambda a_n\}(\lambda\neq 0)$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，$\{a_n^2\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$仍然是等比数列.

考点自测

1.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，S_n为$\{a_n\}$的前n项和.若$S_n=126$，则n=________.

2.等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则$a_1=$（）

A.$\frac{1}{3}$　　B.$-\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{9}$　　D.$-\frac{1}{9}$

3.等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=-2$，$S_5=44$，则a_1的值为（）

A.4　　B.-4　　C.2　　D.-2

4.设数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=\frac{5}{3}$，$a_{n+2}=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n$，令$b_n=a_{n+1}-a_n$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

5.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-3n$.

（1）求 a_1， a_2， a_3 的值；

（2）是否存在常数 λ，使得 $\{a_n+\lambda\}$ 为等比数列？若存在，求出 λ 的值和通项公式 a_n；若不存在，请说明理由.

6.若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和等于公比 q，则首项 a_1 的最大值是________.

7.已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列，其前 n 项和是 S_n，若 $a_2+a_3=2$， $a_3+a_4=1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=$________.

7.4 数列的方法与技巧

1.公式法

（1）等差数列的前 n 项和公式： $S_n=\dfrac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$ ；

（2）等比数列的前 n 项和公式： $S_n=\begin{cases} na_1(q=1), \\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1). \end{cases}$.

2.几种数列求和的常用方法

（1）分组求和法：一个数列的通项公式是由若干个等差或等比或可求和的数列组成的，则求和时可用分组求和法，分别求和而后相加减.

（2）裂项相消法：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消（注意消项规律），从而求得前 n 项和.裂项时常用的三种变形：

① $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ；

② $2\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

（3）错位相减法：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构

成的，那么求这个数列的前 n 项和即可用错位相减法.

（4）倒序相加法：如果一个数列 $\{a_n\}$ 首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法求解.

考点自测

1.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n$，则 $S_{17}=$________.

2.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，则 S_5 等于（）

A.1　　B.$\dfrac{5}{6}$　　C.$\dfrac{1}{6}$　　D.$\dfrac{1}{30}$

3.若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n+2n-1$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$（）

A.2^n+n^2-1　　B.$2^{n+1}+n^2-1$　　C.$2^{n+1}+n^2-2$　　D.2^n+n-2

4.$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$ 等于（）

A.$\dfrac{2^n-n-1}{2^n}$　　B.$\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$　　C.$\dfrac{2^n-n+1}{2^n}$　　D.$\dfrac{2^{n+1}-n+2}{2^n}$

方法 1　利用累加法——形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$，求 a_n

【例 1】数列 $\{a_n\}$ 的首项为 3，$\{b_n\}$ 为等差数列，且 $b_n=a_{n+1}-a_n$，若 $b_3=-2$，$b_{10}=12$，则 $a_8=$（）

A.0　　B.3　　C.8　　D.11

变式：设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}-a_n=n+1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

方法 2　利用累乘法——形如 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，求 a_n.

【例 2】在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

变式

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2^n a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

方法 3　构造辅助数列求通项——形如 $a_{n+1}=Aa_n+B$（$A\neq 0$ 且 $A\neq 1$，$B\neq 0$），求 a_n

【例 3】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

规律总结

求此类数列的通项公式，通常采用待定系数法将其转化为 $(a_{n+1}+x)=A(a_n+x)$，先求出 x，再借助等比数列 $\{a_n+x\}$ 求解.

方法 4　取倒数法——形如 $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ba_n+C}$ **（*A*，*B*，*C* 为常数），求** a_n

【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$________.

规律总结

将原式变形为 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{C}{A}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{B}{A}$.

①若 $A=C$，则 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，且公差为 $\dfrac{B}{A}$，可直接用公式求通项；

②若 $A\neq C$，则采用待定系数法，构造新数列求解.

变式与提高

已知数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，且当 $n\geq 2$ 时，$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

方法 5　分组转化法求和

【例 5】已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和.

1.由数列递推式求通项公式常用方法有：

递推式	方法
$a_{n+1}=a_n+f(n)$	累加法
$a_{n+1}=a_nf(n)$	累乘法
$a_{n+1}=Aa_n+B(A\neq 0,1)$	构造法
$a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ba_n+C}$（$A$，$B$，$C$ 为常数，且都不为 0）	取倒数法

2.求数列前 n 项和，首先要考查其通项公式，根据通项公式的特点，再来确定选用何种求和方法.在应用错位相减法求和时，一定要注意公比是否为 1.求一般数列的前 n 项和，无通法可循，我们要掌握某些特殊数列前 n 项和的求法，触类旁通.

数列求和的常用方法有：

（1）公式法：直接转化为基本数列（等差数列或等比数列）求和.

（2）倒序相加法：必须满足$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_n+a_1$.

（3）错位相减法：主要用于数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和，其中$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列.

（4）分组求和法：主要适用于两类数列求和.

①数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和，其中数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$为等差数列或等比数列；

②数列通项为分类形式的数列求和，如$a_n=\begin{cases}2^n(1\le n\le 5),\\ 5n-3(n\ge 6).\end{cases}$

（5）裂项相消法：主要用于数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和，其中$\{a_n\}$为等差数列，公差为 d，

则$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$.

7.5　数学归纳法

知识梳理

一般地，证明一个与正整数 n 有关的数学命题，可按如下两个步骤进行：

（1）证明当$n=n_0$（n_0为正整数）时，命题成立；

（2）假设当$n=k$（$k\ge n_0$，k为正整数）时命题成立，证明当$n=k+1$时命题也成立.

根据（1）（2），就可以断定命题对从n_0开始的所有正整数 n 都成立，这种证明方法叫做数学归纳法.

考点自测

1.在应用数学归纳法证明凸 n 边形的对角线为$\dfrac{1}{2}n(n-3)$条时，第一步检验 n 等于________.

2.用数学归纳法证明“$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\ne 1)$”.当验证$n=1$时，上式左边计算所得为________.

3.设$f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}$（$n$ 为正整数），那么$f(n+1)-f(n)$等于（）

A.$\dfrac{1}{3n+2}$　　B.$\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{3n+1}$　　C.$\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}$　　D.$\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}$

第八章　平面向量

8.1　平面向量的概念和线性运算

1.向量的有关概念

（1）向量：既有大小又有方向的量叫做向量，向量的大小也叫做向量的长度（或向量的模）.

（2）零向量：规定模为 0 的向量叫做零向量，其方向是任意的.

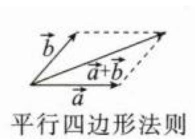
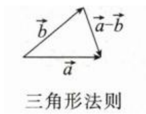
（3）单位向量：模为 1 的向量叫做单位向量.

（4）平行向量：方向相同或相反的非零向量.平行向量又叫共线向量.规定：$\vec{0}$ 与任意向量平行.

（5）相等向量：模相等且方向相同的向量.

（6）负向量：模相等且方向相反的向量.

2.向量的线性运算

向量运算	定义	法则（或集合意义）	运算律
加法	求向量和的运算	 	（1）交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$； （2）结合律； $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
减法	求向量差的运算		$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
数乘	求实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积的运算	（1）$\lvert\lambda\vec{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\vec{a}\rvert$； （2）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$； $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$； $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

3.共线向量定理

向量 $\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$ 与 $\vec{b}$ 共线，则存在实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

[常用结论]

1.若 P 为线段 AB 的中点，O 为平面内任一点，则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

2.若 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$（$\lambda$、$\mu$ 为实数）且 O 不在直线 AB 上，若点 A、B、C 共线，则 $\lambda+\mu=1$.

3.一般地，首尾顺次相接的多个向量的和等于从第一个向量起点指向最后一个向量终点的向量，即 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$，特别地，一个封闭图形，首尾连接而成的向

量和为零向量.

4.与非零向量$\vec{a}$共线的单位向量为$\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

考点自测

1.在平行四边形$ABCD$中，若$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$，则四边形$ABCD$的形状为（）

A.平行四边形　　B.矩形　　C.菱形　　D.正方形

2.对于非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，“$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（）

A.充分非必要条件　　B.必要非充分条件

C.充要条件　　D.既非充分也非必要条件

3.在△ABC中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则用向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{EB}$为（）

A.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　B.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　C.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

4.在平行四边形$ABCD$中，E、F分别为边BC、CD的中点，若$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}(x,y\in\mathbf{R})$，则$x-y=$________.

8.2　平面向量的数量积

1.向量的夹角

已知两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB$就是向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记作$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，它的范围是$[0,\pi]$.

2.平面向量的数量积

定义	设两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为θ，则数量$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积，记$\vec{a}\cdot\vec{b}$
投影	$|\vec{a}|\cos\theta$叫做向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影，$|\vec{b}|\cos\theta$叫做向量$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影
几何意义	数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$\vec{a}$的长度$|\vec{a}|$与$\vec{b}$在$\vec{a}$的方向上的投影$|\vec{b}|\cos\theta$的乘积

3.平面向量数量积的运算律

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

（2）对数乘的结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；

（3）对加法的分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4.平面向量数量积的性质及其坐标表示

设非零向量$\vec{a}=(x_1,y_1)$ ，$\vec{b}=(x_2,y_2)$ ，$\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

结论	几何表示	坐标表示
模	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
数量积	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
夹角	$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
$\vec{a}\perp\vec{b}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert$与$\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$的关系	$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert\le\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$	$\lvert x_1x_2+y_1y_2\rvert\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

[常用结论]

1.平面向量数量积运算的常用公式

（1）$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$ ；

（2）$(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

2.两个向量$\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的夹角为锐角$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 不共线；

两个向量$\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的夹角为钝角$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}<0$且$\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 不共线.

考点自测

1.已知$\lvert\vec{a}\rvert=5$,$\lvert\vec{b}\rvert=4$,$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的夹角$\theta=120°$,则向量$\vec{b}$ 在向量$\vec{a}$ 方向上的投影为_________.

2.已知$\lvert\vec{a}\rvert=2$ ，$\lvert\vec{b}\rvert=6$ ，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6\sqrt{3}$ ，则$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的夹角$\theta=$_________.

3.已知向量$\vec{a}=(1,m)$ ，$\vec{b}=(3,-2)$ ，且$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$ ，则 m=_________.

4.已知向量$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 满足$\lvert\vec{a}\rvert=3$ ，$\left|\vec{b}\right|=1$ ，$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$ ，则$\lvert\vec{a}+3\vec{b}\rvert=$_________.

5.若向量$\vec{a}=(k,3)$ ，$\vec{b}=(1,4)$ ，$\vec{c}=(2,1)$ ，已知$2\vec{a}-3\vec{b}$ 与$\vec{c}$ 的夹角为钝角，则的取值范围是________.

6.已知非零向量$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 满足$\lvert\vec{a}\rvert=2\lvert\vec{b}\rvert$ ，且$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$ ，则$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的夹角为________.

7.已知向量$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，若$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为60°，且$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$，则实数$\frac{m}{n}$的值为（）

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.6　　D.4

8.3　平面向量基本定理与向量的坐标表示

1.平面向量基本定理

（1）定理：如果$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$是平面上两个不平行的向量，那么该平面上的任意向量$\vec{a}$，都可唯一地表示为$\vec{e}_1$与$\vec{e}_2$的线性组合，即存在唯一的一对实数λ与μ，使得$\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}$.

（2）　**不平行的向量才能构成一组基底**

2.平面向量的坐标运算

（1）向量加法、减法、数乘及向量的模

设$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，

$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$，$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

（2）向量坐标的求法

①若向量的起点是坐标原点，则终点坐标即为向量的坐标.

②设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3.平面向量共线的坐标表示

设$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，$\vec{a}$、$\vec{b}$共线$\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

4.若 *G* 是△*ABC* 的重心，则$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

考点自测

1.已知点 *A*（0，1），*B*（3，2），向量$\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量$\overrightarrow{BC}=$________.

2.已知▱*ABCD* 的顶点 *A*（-1，-2），*B*（3，-1），*C*（5，6），则顶点 *D* 的坐标为________.

3.已知向量$\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-1,2)$，若$m\vec{a}+n\vec{b}$与$\vec{a}-2\vec{b}$共线，则$\frac{m}{n}=$________.

4.已知平面向量 $\vec{a}=(1,1)$ ，$\vec{b}=(1,-1)$ ，则 $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}=$（）

A.（-2，-1） B.（-2，1） C.（-1，0） D.（-1，2）

第九章 复数

9.1 复数的概念及几何意义

1.复数的有关概念

（1）复数的概念：形如 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的数称为一个复数，其中 a 和 b 分别是它的实部和虚部.若 b=0，则 $a+b\mathrm{i}$ 为实数；若 $b\neq 0$ ，则 $a+b\mathrm{i}$ 为虚数；若 $a=0$ 且 $b\neq 0$ ，则 $a+b\mathrm{i}$ 为纯虚数.

（2）复数相等： $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

（3）复数的模：复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的模是 $|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

2.复数的几何意义

（1）复数 $z=a+b\mathrm{i}\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b)(a,b\in\mathbf{R})$.

（2）复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ ，其中 $Z(a,b)$.

考点自测

1.四边形 $ABCD$ 是复平面内的平行四边形，A，B，C 三点对应的复数分别是 1+3i，-i，2+i，则点 D 对应的复数为________.

2.已知复数 z 的实部为-1，虚部为 2，则 $|z|=$________.

3.若复数 $z=(x^2-1)+(x-1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则实数 x 的值为（）

A.-1 B.0 C.1 D.-1 或 1

4.在复平面内，向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 2+i，向量 $\overrightarrow{CB}$ 对应的复数是-1-3i，则向量 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数是（）

A.1-2i B.-1+2i C.3+4i D.-3-4i

9.2 复数的运算

复数的运算

（1）复数的加、减、乘、除运算法则

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$ ， $z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ ，则

①加法： $z_1+z_2=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$ ；

②减法：$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$；

③乘法：$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$；

④除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}\neq 0)$.

（2）共轭复数：一个复数 z 的共轭复数记为 $\overline{z}$.因此，若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$.

若 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 共轭，则 $a=c$， $b=-d$ （a、b、c、 $d\in\mathbf{R}$ ）.

[常用结论]

（1） $(1\pm\mathrm{i})^2=\pm2\mathrm{i}$； $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$； $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

（2） $\mathrm{i}^{4n}=1$， $\mathrm{i}^{4n+1}=1$， $\mathrm{i}^{4n+2}=-1$， $\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$（$n$ 为正整数）.

（3） $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$； $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$； $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$； $|z^n|=|z|^n$. **复数乘除幂的模等于复数模的乘除幂**

考点自测

1.已知 $(1+2\mathrm{i})\overline{z}=4+3\mathrm{i}$，则 $z=$________.

2.设 $z=(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$，则复数 z 在复平面内所对应的点位于（）

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，则 $|z|$ 等于（）

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

9.3　实系数一元二次方程

1.实系数一元二次方程

当 a、b、c 都是实数且 $a\neq0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 称为实系数一元二次方程，这个方程在复数范围内总是有解的，而且

（1）当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实根（二重根）$-\dfrac{b}{2a}$；

（3）当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程有一对共轭虚根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}}{2a}$.

考点自测

1. x^4-16 分解成一次式的乘积为________.

2.已知关于 x 的实系数方程 $x^2+kx+k^2-3k=0$ 有一个模为 1 的虚根，则 k 的值为________.

3.复数 $z_1=3+2\mathrm{i}$（i 为虚数单位）是方程 $z^2-6z+b=0(b\in\mathbf{R})$ 的一个根，则 b 的值为________.

4.若 $1-\sqrt{2}\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根，则（）

A. $b=2$，$c=3$　　　　B. $b=-2$，$c=1$

C. $b=2$，$c=-1$　　　　D. $b=-2$，$c=3$

第十章　空间直线与平面、简单几何体

10.1　平面及其基本性质

1.立体几何中的公理及其推论

（1）公理 1：如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面上.

（2）公理 2：不在同一直线上的三点确定一个平面.

推论 1：一条直线和这条直线外的一点确定一个平面.

推论 2：两条相交直线确定一个平面.

推论 3：两条平行直线确定一个平面.

（3）公理 3：如果两个不同的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

（4）公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

考点自测

1.异面直线 a、b 满足 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$l=\alpha\cap\beta$，则直线 l 与 a、b 的位置关系一定是________.

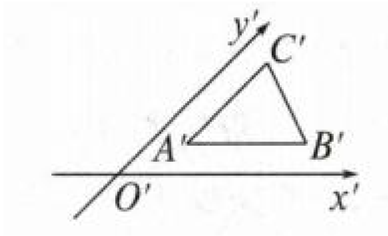
2.若直线 a、b 是异面直线，且 $b//c$，则直线 a 与 c 的位置关系是________.

3.如果平面外的一条直线上的两点到这个平面的距离相等（且不为零），则这条直线与平面的位置关系是________.

4.分别和两条异面直线都相交的两条直线一定是________.

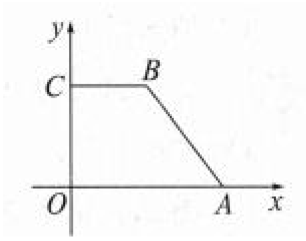
5.若三个不重合的平面两两相交，则交线有________条.

6.如图，$\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的直观图，其中 $A'B'=A'C'$，$A'B'//x'$ 轴，$A'C'//y'$ 轴，那么 $\triangle ABC$ 是（）



A.等腰三角形　　　　B.钝角三角形　　　　C.等腰直角三角形　　D.直角三角形

7.如图，已知直角梯形 $OABC$ 上下两底分别为分别为 2 和 4，高为 $2\sqrt{2}$，求利用斜二测画法所得其直观图的面积.



10.2　直线与直线的位置关系

1.异面直线：不同在任何一个平面上的两条直线叫做异面直线.

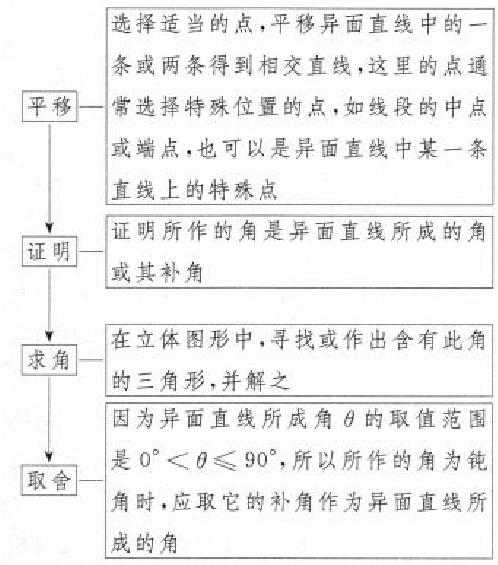
2.异面直线判定定理

过平面外一点与平面上一点的直线，和此平面上不经过该点的任何一条直线都是异面直线.

3.两条异面直线所成的角

两条异面直线平移到相交位置时所得到的锐角或直角，称为这两条异面直线所成的角.两条异面直线所成的角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4.求异面直线所成角的一般步骤为：



考点自测

1.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， AD_1 与 A_1C_1 所成角的大小是________.

2.空间四边形 *ABCD* 中，*AD*=*BC*=2，*AD* 与 *BC* 成 60° 角，*E*、*F* 分别是 *AB*、*CD* 的中点，则 *EF*=________.

3.空间三条直线中，任意两条不共面，且两两互相垂直，一条直线 *l* 与这三条直线所成的角均为 α ，则 $\tan\alpha=$________.

4.已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均相等，*E* 是 *PC* 的中点，那么异面直线 *BE* 与 *PA* 所成角的余弦值等于________.

5.已知直线 $AB//CD$ ，它们都在平面 α 内，且相距 28. $EF//\alpha$ ，且相距 15. $EF//AB$ ，且相距 17.则 *EF* 和 *CD* 间的距离为________.

10.3　直线与平面的位置关系

1.直线与平面平行

定义：当直线与平面没有公共点时，叫做直线与平面平行.

判定定理：如果不在平面上的一条直线与这个平面上的一条直线平行，那么该直线与这个平面平行.

性质定理：如果一条直线与一个平面平行，过这条直线的一个平面与此平面相交，那么其交线必与该直线平行.

2.直线与平面垂直

定义：如果一条直线与平面上的任意一条直线都垂直，就说这条直线与这个平面互相垂直.

判定定理：如果一条直线与一个平面上的两条相交直线都垂直，那么此直线与该平面垂直.

性质定理：垂直于同一个平面的两条直线互相平行.

3.点到平面的距离

法一：找面的垂线，再去证明该线与面垂直

法二：用体积转化法

4.直线与平面所成的角

（1）定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和平面所成的角.

（2）直线与平面所成角的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5.三垂线定理

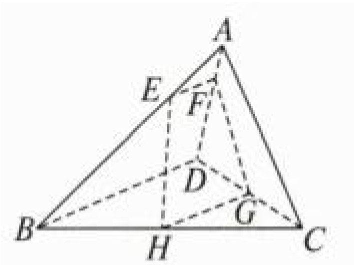
平面上的一条直线和这个平面的一条斜线垂直的充要条件是它和这条斜线在平面上的投影垂直.

考点自测

1.若直线 l 上有三点 A、B、C 到平面 α 的距离均为1，则直线 l 与平面 α 的位置关系为________.

2.如果直线 a 与平面 α 不垂直，那么平面 α 内与直线 a 垂直的直线有________条.

3.如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 AB、AD 上的点，且 $AE:EB=AF:FD=1:4$，又 H，G 分别为 BC，CD 的中点，则下列说法中错误的是________.



① $BD//$平面 EFG，且四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

② $EF//$平面 BCD，且四边形 $EFGH$ 是梯形；

③ $HG//$平面 ABD，且四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

④ $EH//$平面 ADC，且四边形 $EFGH$ 是梯形.

4.在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$PA\perp$平面 $ABCD$，且 $PA=1$，则点 P 到对角线 BD 的距离是________.

5.已知 m，n 表示两条不同的直线，α 表示平面.下列说法正确的是（）

A.若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　　B.若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$

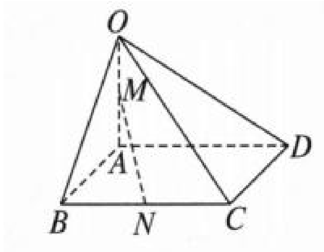
C.若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$　　D.若 $m//\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

6.已知 m 和 n 是两条不同的直线，α 和 β 是两个不重合的平面，则下列给出的条件中一定能推出 $m\perp\beta$ 的是（）

A.$\alpha\perp\beta$ 且 $m\subset\alpha$　　B.$\alpha\perp\beta$ 且 $m//\alpha$

C.$m//n$ 且 $n\perp\beta$　　D.$m\perp n$ 且 $n//\beta$

7.如图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，M 为 OA 的中点，N 为 BC 的中点，求证：$MN//$平面 OCD.



10.4　平面与平面的位置关系

1.两个平面平行的判定定理

如果一个平面上的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行.

2.两个平面平行的性质定理

如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

3.几个重要结论

（1）垂直于同一条直线的两个平面平行；

（2）如果两个平面平行，那么在一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面；

（3）一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，则它也垂直于另外一个平面；

（4）夹在两个平行平面中的平行线段相等；

（5）经过平面外一点有且仅有一个平面与已知平面平行：

①两个平面平行的判定定理中必须是“两条”“相交”直线才能得出面面平行，把条件改成“一条”“两条”“无数条”都不一定成立；

②面面平行则面内的所有直线都平行于另一个平面，但是分别在两个平行平面内的两条直线不一定平行.

4.二面角

（1）定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面.

（2）二面角的平面角：过二面角的棱上任意一点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

（3）二面角的取值范围是$[0,\pi]$；

（4）当两个平面相交所成的二面角为直角时，则称这个二面角为直二面角，组成直二面角的两个平面互相垂直；

（5）二面角的求法：

①几何定义法；②三垂线法；③补棱法；④射影面积法；⑤垂面法；⑥空间向量法.

5.平面与平面垂直的判定定理

如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.

6.平面与平面垂直的性质定理

如果两个平面垂直，那么其中一个平面上垂直于两平面交线的直线与另一个平面垂直.

7.平面与平面垂直的判定方法

①定义法：两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，那么这两个平面互相垂直.

②如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

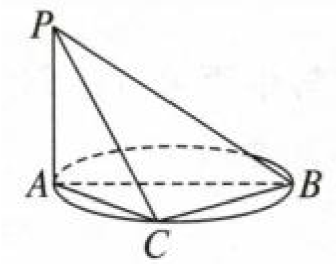
③一个平面垂直于两个平行平面中的一个，也垂直于另一个.

考点自测

1.已知平面$\alpha//$平面β，直线$l\subset\alpha$，则l与β的位置关系是________.

2.在长方体$ABCD-A_1B_1CD_1$中，AB=3，BC=2，$AA_1=1$，平面ABB_1A_1与平面DCC_1D_1的距离为________.

3.如图，AB是圆的直径，$PA\perp AC$，$PA\perp BC$，C是圆上一点（不同于A，B)，且PA=AC，则二面角P-BC-A的平面角为________.



4.平面$\alpha//\beta$，点A，$C\in\alpha$，点B，$D\in\beta$，如果AB+CD=28，且AB，CD在β内射影长分别为5和9，则平面α与β间的距离为________.

5.到空间不共面的四点距离相等的平面的个数为________个.

6.给出下列四个命题：

①垂直于同一直线的两个平面互相平行；

②垂直于同一平面的两个平面互相平行；

③若一个平面内有无数条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；

④若一条直线垂直于一个平面内的任意一条直线，则这条直线垂直于这个平面.

其中真命题的个数是（）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

10.5　简单几何体的结构、体积、表面积

1、锥体的体积：$V_{锥}=\frac{1}{3}S_{底}h$.

圆锥的表面积：$S_{表}=\frac{1}{2}cl+S_{底}=\pi rl+\pi r^{2}$.

其中，$S_{底}$、h 与 c 分别是锥体的底面积、高与底面周长，h' 是正三棱锥的斜高，r 与 l 是圆锥的底半径和母线长.

什么是正三棱锥？

什么是正四面体？

什么是直棱柱？

什么是正棱柱？

（3）球的体积和表面积：

球的体积：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^{3}$.

球的表面积：$S_{球}=4\pi R^{2}$.

其中，R 是球的半径.

4.祖暅原理

夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任意平面截得的两个截面都有相等的面积，那么这两个几何体的体积必相等.

考点自测

1.圆锥的底面半径为 3，高为 1，则圆锥的侧面积为________.

2.已知某圆锥的底面半径 $r=3$ ，沿圆锥的母线把侧面展开后得到一个圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$ 的扇形，则该圆锥的表面积是________.

3.已知正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的侧棱和底面边长都等于 $2\sqrt{2}$ ，则它的外接球的表面积是（）

A. 16π　　B. 12π　　C. 8π　　D. 4π

10.6　空间向量及其运算

1、空间向量基本定理： 如果 $\overrightarrow{e_1}$ 、 $\overrightarrow{e_2}$ 与 $\overrightarrow{e_3}$ 是不共面的向量，那么对于空间中任一向量 $\vec{a}$ ，存在唯一的一组实数 λ 、 μ 与 υ ，使得 $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\mu\overrightarrow{e_2}+\upsilon\overrightarrow{e_3}$.也就是说，**空间任意三个不共面的**

向量都组成空间向量的一个基.

2.坐标表示下的空间向量运算

设向量 $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$， $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则

（1） $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$；

（2） $\vec{a}\pm\vec{b}=\left(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\right)$；

（3） $\lambda\vec{a}=\left(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\right)$；

（4） $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

3.空间向量的夹角、平行与垂直

设向量 $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$， $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 均为非零向量，则

（1） $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$；

（2） $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$， $\lambda\in\mathbf{R}\Leftrightarrow x_1=\lambda x_2$， $y_1=\lambda y_2$， $z_1=\lambda z_2(\lambda\in\mathbf{R})$；

（3） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

考点自测

1.向量 $\vec{a}=(1,2,3)$ 与 $\vec{b}=(2,-3,-1)$ 之间的夹角 θ 的大小为________.

2.已知 $\vec{a}=(2,1,3)$， $\vec{b}=(-4,2,x)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=$________.

3.已知 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$，且 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=30$，则 $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=$________.

4.已知 A，B，C 三点不共线，O 是平面 ABC 外的任意一点，若点 P 在平面 ABC 内，且 $\overline{OP}=\dfrac{1}{5}\overline{OA}+\dfrac{2}{3}\overline{OB}+m\overline{OC}$，则实数 m=________.

5.若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为空间的一个基，则下列各项中，能构成一个基的一组向量是（）

A. $\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

B. $\vec{b},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

C. $\vec{c},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

D. $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$

6.已知 $\vec{a}=(2,1,-3)$， $\vec{b}=(-1,2,3)$， $\vec{c}=(7,6,\lambda)$，若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三向量共面，则 $\lambda=$（）

A.9　　B.-9　　C.-3　　D.3

7.已知平面 α 内两向量 $\vec{a}=(1,1,1)$ ， $\vec{b}=(0,2,-1)$ ，若 $\vec{c}$ 为平面 α 的一个法向量且 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}+(4,-4,1)$ ，则 m，n 的值分别为________.

8.设平面 α 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,2,-2)$ ，平面 β 的一个法向量为 $\vec{n}=(-2,-4,k)$ ，若 $\alpha//\beta$ ，则 k=________.

9.已知平面 α 的法向量为 $\vec{a}=(1,2,-2)$ ，平面 β 的法向量为 $\vec{b}=(-2,-4,k)$ ，若 $\alpha\perp\beta$ ，则 k 等于________.

10.若直线 l 的方向向量为 $\vec{a}=(1,0,2)$ ，平面 α 的法向量为 $\vec{n}=(-2,0,-4)$ ，则（）

A. $l//\alpha$　　　　B. $l\perp\alpha$

C. $l\subset\alpha$　　　　D. l 与 α 斜交

11.若平面 α ， β 的法向量分别为 $\vec{n}_1=(2,-3,5)$ ， $\vec{n}_2=(-3,1,-4)$ ，则（）

A. $\alpha//\beta$　　　　B. $\alpha\perp\beta$

C. α 与 β 相交但不垂直　　　　D.以上均不正确

10.7　空间向量在立体几何中的应用

1.用空间向量求距离

（1）平面外一点 A 到平面的距离 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}|}$，其中 $\vec{n}$ 是平面的一个法向量，B 是平面上任意一点.

（2）平面的平行线到平面的距离、平行平面间的距离均化为点到平面的距离来处理.

2.用空间向量求角的大小

（1）具有方向向量 $\vec{r_1}$ 与 $\vec{r_2}$ 的两条直线的所成角 θ 的大小由如下公式确定： $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}|}{|\overrightarrow{r_1}||\overrightarrow{r_2}|}$.

（2）具有方向向量 $\vec{r}$ 的直线与具有法向量 $\vec{n}$ 的平面的所成角 θ 的大小由如下公式确定：$\sin\theta=\dfrac{|\vec{r}\cdot\vec{n}|}{|\vec{r}||\vec{n}|}$.

（3）具有法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 与 $\overrightarrow{n_2}$ 的两个平面所成的锐二面角（或直二面角）θ 的大小由如下公式确定： $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$.

3.求线面角

（1）分别求出斜线和它在平面内的射影直线的方向向量，转化为求两个方向向量的夹角（或其补角）;

（2）通过平面的法向量来求，即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角，取其余角就是斜线和平面所成的角.

4.求二面角

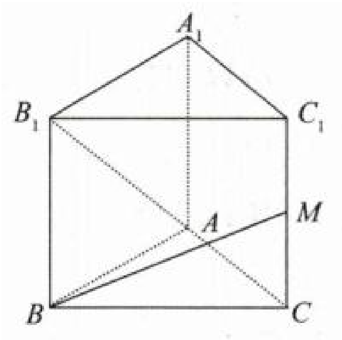
分别求出二面角的两个半平面所在平面的法向量，然后通过两个平面的法向量的夹角得到二面角的大小，但要注意结合实际图形判断所求角是锐角还是钝角.

考点自测

1.已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，$CG\perp$平面 $ABCD$，$CG=2$，E、F 分别是 AB、AD 的中点，则点 C 到平面 GEF 的距离是________.

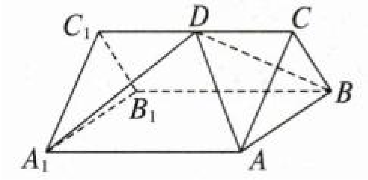
2.已知平面 α 的法向量为 $\vec{n}_1=(1,2,x)$，平面 β 的法向量为 $\vec{n}_2=(-2,y,4)$，若 $\alpha//\beta$，则 $x-y=$________.

3.如图所示，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等，M 是侧棱 CC_1 的中点，则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是________.



4.若平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(4,1,1)$，直线 l 的一个方向向量为 $\vec{a}=(-2,-3,3)$，则 l 与 α 所成的角为________.

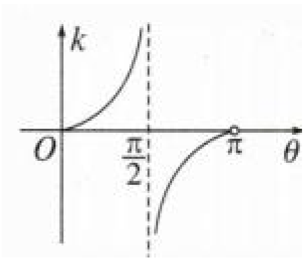
5.如图，已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，它的底面边长和侧棱长都是 2，D 为侧棱 CC_1 的中点.求直线 A_1B_1 到平面 DAB 的距离.



第十一章　平面直角坐标系中的直线

11.1　直线的倾斜角与斜率

直线的倾斜角与斜率

<table>
<tr><th></th><th>直线的倾斜角</th><th>直线的斜率</th></tr>
<tr><td>定义</td><td>当直线 l 与 x 轴相交时，我们以 x 轴为基准，x 轴正方向与直线 l 向上的方向之间所成的角 θ 叫做直线 l 的倾斜角.当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0</td><td>当直线 l 的倾斜角 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 时，定义倾斜角 θ 的正切值 $\tan\theta$ 叫做这条直线的斜率，常用小写字母 k 表示，即 $k=\tan\theta$；经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$（$x_1 \neq x_2$）的直线 l 的斜率公式为 $k_{P_1P_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$</td></tr>
<tr><td>区别</td><td>直线 l 垂直于 x 轴时，直线 l 的倾斜角是 90°；倾斜角的取值范围为 $[0,\pi)$</td><td>直线 l 垂直于 x 轴时，直线 l 的斜率不存在；斜率 k 的取值范围为 $\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>联系</td><td colspan="2">（1）当直线 l 不垂直于 x 轴时，直线的斜率和直线的倾斜角为一一对应关系；
（2）当直线 l 的倾斜角 $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，θ 越大，直线 l 的斜率越大；当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，θ 越大，直线 l 的斜率越大；
（3）所有的直线都有倾斜角，但不是所有的直线都有斜率
</td></tr>
</table>

考点自测

1.过点 M（3，-4），且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程为________.

2.已知两点 $A(-3,\sqrt{3})$，$B(\sqrt{3},-1)$，则直线 AB 的斜率是________.

3.如果直线 l 过 $A(2,1)$，$B(1,m^2)(m\in\mathbf{R})$ 两点，那么直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是________.

4.已知点 A（2，-3），B（-3，-2），直线 l 过点 P（1，1），且与线段 AB 有交点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是________.

5.过点（-1，2）且倾斜角为 30° 的直线方程为（）

A. $\sqrt{3}x-3y+6+\sqrt{3}=0$　　B. $\sqrt{3}x-3y-6+\sqrt{3}=0$

C. $\sqrt{3}x+3y+6+\sqrt{3}=0$　　D. $\sqrt{3}x+3y-6+\sqrt{3}=0$

6.如果 $AC<0$ 且 $BC<0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不过（）

A.第一象限　B.第二象限　C.第三象限　D.第四象限

11.2　直线的方程

直线方程的五种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$	不含直线 $x=x_0$
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
一般式	$ax+by+c=0$（a，b 不同时为零）	平面内所有直线都适用
点法式	$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$（a、b 不同时为零）	平面内所有直线都适用

考点自测

1.已知直线 l 的倾斜角 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，且经过与（2，3）关于 y 轴对称的点 A，则直线 l 的点斜式方程为________.

2.经过点 M（1，-2）、N（2，3）的直线 l 的两点式方程为________.

3.若直线 l_1 与直线 $l_2:4x+3y+5=0$ 有相同的法向量，且直线 l_1 在 x 轴上的截距为-2，则直线 l_1 的点法式方程为（）

A. $4x+3(y+2)=0$　　B. $4(x+2)+3y=0$

C. $4x+3(y-2)=0$　　D. $4(x-2)+3y=0$

4.若直线 $a_1x+b_1y+1=0$ 和直线 $a_2x+b_2y+1=0$ 都过点 A（2，1），则过点 $P_1(a_1,b_1)$ 和点 $P_2(a_2,b_2)$ 的直线方程是（）

A. $2x+y+1=0$　　B. $2x-y+1=0$

C. $2x+y-1=0$　　　　　　　　　　　　　D. $x+2y+1=0$

5.直线经过点 P（3，2），且在两坐标轴上的截距相等，求直线方程__________

11.3　两条直线的位置关系

1.两条直线平行与垂直的判定

两条直线平行	①对于两条不重合的直线 l_1，l_2，若其斜率分别为 k_1，k_2，则有 $l_1//l_2 \Leftrightarrow k_1=k$； ②当直线 l_1，l_2 不重合且斜率都不存在时，$l_1//l_2$
两条直线垂直	①如果两条直线 l_1，l_2 的斜率存在，设为 k_1，k_2，则有 $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$； ②当其中一条直线的斜率不存在，而另一条直线的斜率为 0 时，$l_1\perp l_2$

2.由一般式方程确定两直线位置关系的方法

直线方程 l_1 与 l_2	$l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ （a_1、b_1 不同时为零） $l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ （a_2、b_2 不同时为零）
垂直的充要条件	$a_1a_2+b_1b_2=0$
平行的充要条件	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}\left(a_2b_2c_2\neq 0\right)$
相交的充要条件	$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}\left(a_2b_2\neq 0\right)$
重合的充要条件	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\left(a_2b_2c_2\neq 0\right)$

3.两条直线的夹角

设直线 $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 的斜率为 k_1，直线 $l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 的斜率为 k_2.

两条相交直线的夹角为 θ，平面上两条直线相交时构成四个角，它们是两对对顶角，我们规定两条相交直线所成的锐角（或直角）是两条相交直线的夹角，取值范围是：$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

$\cos\theta=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$，

$\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}\right|$，

考点自测

1.已知 $P(-2,m)$， $Q(m,4)$，且直线 PQ 垂直于直线 $x+y+1=0$，则 m=________.

2.已知直线 $l_1: x+ay+2=0$ 和 $l_2:(a-2)x+3y+6a=0$，则 $l_1//l_2$ 的充要条件是 a=________.

3.已知直线 $l_1:\sqrt{3}x-y+2=0$， $l_2: 3x+\sqrt{3}y-5=0$，则直线 l_1 和 l_2 的夹角为________.

4.直线 $3x+2y+6=0$ 和 $2x+5y-7=0$ 的交点的坐标为（）

A.（-4，-3）　　B.（4，3）　　C.（-4，3）　　D.（3，4）

5.若原点在直线 l 上的射影是 P（-2，1），则直线 l 的方程为（）

A. $x+2y=0$　　B. $y-1=-2(x+2)$　　C. $y=2x+5$　　D. $y=2x+3$

11.4　点到直线的距离

1.三种距离公式

（1）平面上的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 间的距离公式 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.特别地，原点 O（0，0）与任一点 $P(x,y)$ 的距离 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

（2）点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l: ax+by+c=0$ 的距离为 $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

（3）两条平行线 $ax+by+c_1=0$ 与 $ax+by+c_2=0$ 间的距离为 $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.点关于直线的对称问题

（1）点 $P_0(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称点 $P'(y_0-b,x_0+b)$；

（2）点 $P_0(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称点 $P'(b-y_0,b-x_0)$；

（3）点 $P_0(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=kx+b$ 的对称点 $P'(m,n)$ 满足 $\begin{cases}\frac{n-y_0}{m-x_0}=-\frac{1}{k},\\ k\cdot\frac{x_0+m}{2}-\frac{y_0+n}{2}+b=0.\end{cases}$

考点自测

1.已知直线 $3x+4y-3=0$ 与直线 $6x+my+14=0$ 平行，则它们之间的距离是________.

2.已知点 $(a,2)(a>0)$ 到直线 $l: x-y+3=0$ 的距离为 1.则 a 等于（）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $2-\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{2}-1$　　　　D. $\sqrt{2}+1$

3.若直线 $l_1: y=k(x-4)$ 与直线 l_2 关于点（2，1）对称，则直线 l_2 恒过定点（）

A. $(0,4)$　　　　B. $(0,2)$　　　　C. $(-2,4)$　　　　D. $(4,-2)$

4.直线 l 过点 P（-1，2）且到点 A（2，3）和点 B（-4，5）的距离相等，求直线 l 的方程.

第十二章　圆锥曲线

12.1　圆

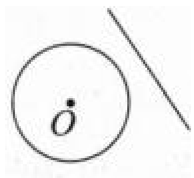
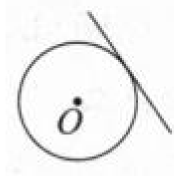
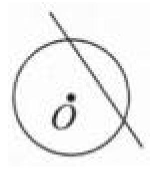
1.圆的定义及其方程

（1）圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 是以点 (a,b) 为圆心，r 为半径的圆的方程，叫做圆的标准方程.

参数方程

（2）圆的一般方程：当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做圆的一般方程.圆心为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径长为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

2.直线与圆的位置关系（半径为 *r*，圆心到直线的距离为 *d*）

		相离	**相切**	**相交**
图形				
量化	方程观点	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
	几何观点	$d>r$	$d=r$	$d<r$

（1）圆的切线方程常用结论

①过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

②过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r$.

③过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $M(x_0,y_0)$ 作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

（2）有关弦长问题的两种求法

几何法	直线被圆截得的半弦长$\frac{1}{2}\left\|AB\right\|$，弦心距 d 和圆的半径 r 构成直角三角形，即 $\left\|AB\right\|=2\sqrt{r^2-d^2}$
代数法	联立直线方程和圆的方程，消元转化为关于 x 的一元二次方程，由根与系数的关系即可求得弦长 $\|AB\|=\sqrt{1+k^2}\left\|x_1-x_2\right\|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 或 $\|AB\|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left\|y_1-y_2\right\|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

3.圆与圆的位置关系（两圆半径为 r_1，r_2，$d=\left|O_1O_2\right|$）

（1）外离　外切　 相交　内切　内含

（2）相交圆公共弦所在直线方程的求法

考点自测

1.方程 $x^2+y^2+ax+2ay+2a^2+a-1=0$ 表示圆，则 a 的取值范围是________.

2.圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切，圆 C 截 x 轴所得的弦的长为 $2\sqrt{3}$，则圆 C 的标准方程为________.

3.过点 A（1，2）总可作两条直线与圆 $x^2+y^2+kx+2y+k^2-15=0$ 相切，则 k 的取值范围是________.

4.已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，则圆心 P 的轨迹方程为________.

5.已知圆 $O:x^2+y^2=25$，直线 $l:y=kx+1-k$，则直线 l 被圆 O 截得的最短弦长为________.

6.已知圆 $M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 $l:2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA，PB，切点为 A，B，当 $\left|PM\right|\cdot\left|AB\right|$ 最小时，直线 AB 的方程为（）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$　　C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

12.2　椭圆

1.椭圆的定义

平面上到两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数 $2a(2a>\left|F_1F_2\right|)$ 的点的轨迹叫做椭圆.

当 $2a>2c$ 时，轨迹是椭圆；

当 $2a=2c$ 时，轨迹是一条线段 F_1F_2；

当 $2a<2c$ 时，轨迹不存在.

这两个定点 F_1，F_2 叫做椭圆的焦点，两个焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 叫做焦距.

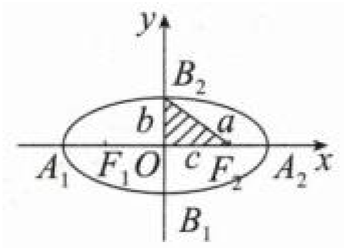
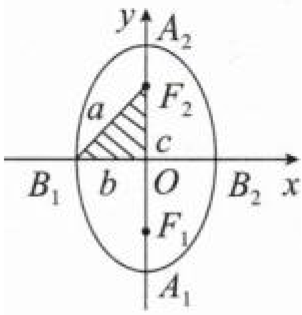
2.椭圆的标准方程

焦点在 x 轴上时：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$；

焦点在 y 轴上时，$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$；　　　　其中 $c^2=a^2-b^2$.

参数方程

3.椭圆的几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">条件</td><td colspan="2">$2a>2c$，$a^2=b^2$，$a>0$，$b>0$，$c>0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>焦点在 x 轴上时：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>焦点在 y 轴上时，$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="7">几何性质</td><td>焦点坐标</td><td>$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$</td><td>$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$；$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$</td><td>$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$；$B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>$|x|\le a$，$|y|\le b$</td><td>$|x|\le b$，$|y|\le a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">对称性关于 x，y 轴均对称，关于原点中心对称</td></tr>
<tr><td>轴</td><td colspan="2">轴长轴 A_1A_2 的长为 $2a$，短轴 B_1B_2 的长为 $2b$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="2">$|F_1F_2|=2c$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\frac{c}{a}$，$e\in(0,1)$</td></tr>
</table>

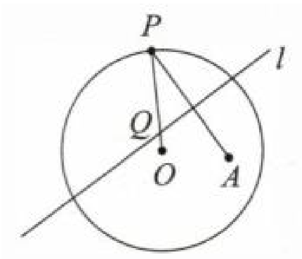
	a，b，c 的关系	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
	焦点三角形面积	$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$

考点自测

1.已知椭圆的中心在原点，以坐标轴为对称轴，且经过两点$\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，$(\sqrt{3},\sqrt{5})$，则椭圆的方程为________.

2.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$，过椭圆$C$上一点$P(1,\sqrt{2})$作倾斜角互补的两条直线$PA$，$PB$，分别交椭圆$C$于$A$，$B$两点，则直线$AB$的斜率为________.

3.如图所示，圆O的半径为定长r，A是圆O内一个定点，P是圆上任意一点，线段AP的垂直平分线l和半径OP相交于点Q，当点P在圆上运动时，点Q的轨迹是（）



A.椭圆　　B.双曲线　　C.抛物线　　D.圆

4.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\dfrac{1}{2}$，过$F_2$的直线与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，若$\triangle F_1AB$的周长为8，则椭圆方程为（）

A.$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　B.$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$　　C.$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　D.$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

5.如图所示，圆柱形玻璃杯中水的液面呈椭圆形状，则该椭圆的离心率为（）

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12.3　双曲线

1.双曲线的定义

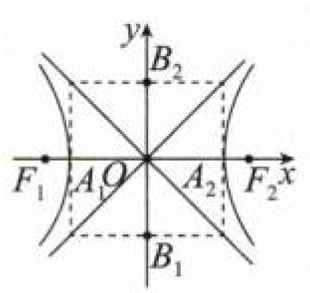
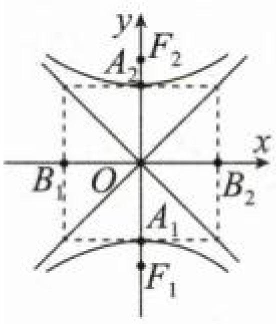
平面内到两个定点 F_1， F_2 的距离之**差的绝对值**等于常数 $2a(0<2a<|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做双曲线.定点 F_1， F_2 叫做双曲线的焦点，两个焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 叫做双曲线的焦距.

若 $2a=|F_1F_2|$，则其轨迹为分别以 F_1， F_2 为端点不包括线段 F_1， F_2 的两条射线；

若 $2a>|F_1F_2|$，则其轨迹不存在；

还要注意定义中“绝对值”的条件也不可少.因为仅满足 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ 的轨迹只是双曲线的一支.

2.双曲线的标准方程和几何性质

标准方程		$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
图像			
性质	**范围**	$x\le -a$ 或 $x\ge a$， $y\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$， $y\le -a$ 或 $y\ge a$
	对称性	对称轴：x 轴，y 轴 对称中心：（0，0）	对称轴：x 轴，y 轴 对称中心：（0，0）
	顶点	顶点坐标： $A_1(-a,0)$， $A_2(a,0)$	顶点坐标： $A_1(0,-a)$， $A_2(0,a)$
	渐近线	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{a}{b}x$
	焦点坐标	$F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$， $F_2(0,c)$
	离心率	$e=\dfrac{c}{a}$， $e\in(1,+\infty)$	
	焦距	$|F_1F_2|=2c$	
	实虚轴	线段 A_1A_2 叫做双曲线的实轴，它的长 $|A_1A_2|=2a$ ；线段 B_1B_2 叫做双曲线的虚	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>轴，它的长$\left|B_1B_2\right|=2b$；

a 叫做双曲线的实半轴长，b 叫做双曲线的虚半轴长.</td></tr>
</table>

a，b，c 的关系，$c^2=a^2+b^2(c>a>0,c>b>0)$.

考点自测

1.已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交于 A，B 两点，且 AB 的中点为 M（1，3），则双曲线的渐近线方程为________.

2.设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，直线 $4x-3y+20=0$ 过点 F 且与双曲线 C 在第二象限的交点为 P，O 为原点，若 $|OP|=|OF|$，则双曲线 C 的离心率为________.

3.已知圆 $C_1:(x+3)^2+y^2=1$ 和圆 $C_2:(x-3)^2+y^2=9$，动圆 M 同时与 C_1 及圆 C_2 相外切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为________.

4.已知双曲线 $x^2-y^2=4$，F_1 是左焦点，P_1，P_2 是右支上的两个动点，则 $\left|F_1P_1\right|+\left|F_1P_2\right|-\left|P_1P_2\right|$ 的最小值是________.

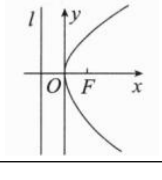
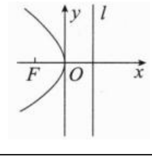
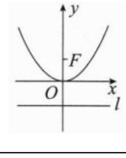
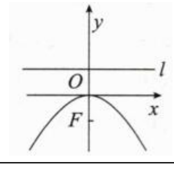
5.已知 F_1，F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，P 在双曲线上，且满足 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为________.

12.4　抛物线

1.抛物线的定义

平面上到一个定点 F 和到一条定直线 l（F 不在 l 上）距离相等的点的轨迹叫做抛物线.点 F 叫做抛物线的焦点，定直线/叫做抛物线的准线.

2.抛物线的标准方程与几何性质

<table>
<tr><td rowspan="2">标准方程</td><td>$y^2=2px(p>0)$</td><td>$y^2=-2px(p>0)$</td><td>$x^2=2py(p>0)$</td><td>$x^2=-2py(p>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">p 的几何意义：焦点离 F 到准线 l 的距</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>顶点</td><td colspan="4">$O(0,0)$</td></tr>
<tr><td>对称轴</td><td colspan="2">x 轴</td><td colspan="2">y 轴</td></tr>
</table>

焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
离心率	$e=1$			
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
范围	$x\ge 0$， $y\in\mathbf{R}$	$x\le 0$， $y\in\mathbf{R}$	$y\ge 0$， $x\in\mathbf{R}$	$y\le 0$， $x\in\mathbf{R}$
开口方向	向右	向左	向上	向下
焦半径（其中 $P(x_0,y_0)$**）**	$\lvert PF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=-x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=-y_0+\frac{p}{2}$

考点自测

1.已知点 $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$，直线 $l:x=\frac{1}{4}$，点 B 是直线 l 上的动点，若过 B 垂直于 y 轴的直线与线段 BF 的垂直平分线交于点 M，则点 M 所在曲线是（）

A.圆　　B.椭圆　　C.双曲线　　D.抛物线

2.以双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的中心为顶点，且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是________.

3.已知直线 $y=k(x+2)(k>0)$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A，B 两点，F 为 C 的焦点，若 $|FA|=2|FB|$，则 k 的值为________.

4.若 F 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，点 P_i（i=1，2，3，…，100）在抛物线上，且 $\overrightarrow{P_1F}+\overrightarrow{P_2F}+\cdots+\overrightarrow{P_{100}F}=\vec{0}$，则 $\left|\overrightarrow{P_1F}\right|+\left|\overrightarrow{P_2F}\right|+\cdots+\left|\overrightarrow{P_{100}F}\right|=$________.

5.抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A，B 在此抛物线上，且 $\angle AFB=120°$，弦 AB 的中点 M 在其准线上的射影为 M'，则 $\frac{|MM'|}{|AB|}$ 的最大值为________.

6.设 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一个动点，F 是抛物线的焦点.若 B（3，2），则 $|PB|+|PF|$ 的最小值为________.

7.在抛物线 $y=4x^2$ 上求一点，使该点到直线 $y=4x-5$ 的距离最短，该点的坐标是________.

8.若直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=4x$ 仅有一个公共点，则实数 k=________.

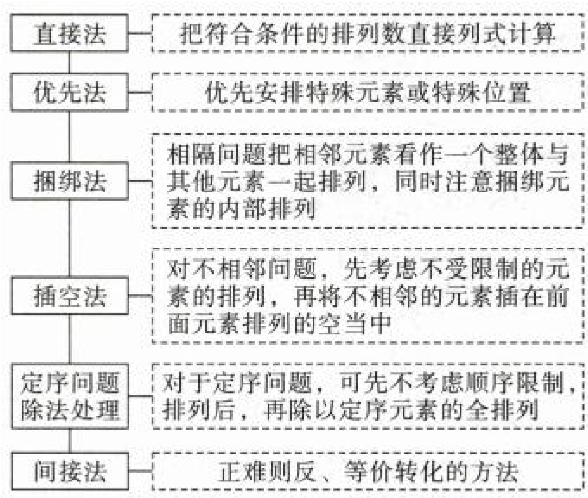
第十三章　计数原理

13.1　排列与组合

1.排列数、组合数的定义、公式、性质

	排列数	组合数
定义	从 n 个不同元素中取出 m（$m \le n$）个不同元素的所有排列的个数	从 n 个不同元素中取出 m（$m \le n$）个不同元素的所有组合的个数
公式	$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ $=\dfrac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{P_m^m} =$ $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ $=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
性质	$P_n^n = n!$， $0! = 1$	$C_n^m = C_n^{n-m}$， $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

求解排列应用问题的六种常用方法



考点自测

1.6 把椅子摆成一排，3 人随机就座，任何两人不相邻的坐法种数为（）

A.144　　B.120　　C.72　　D.24

2.将字母 a，a，b，b，c，c 排成三行两列，要求每行的字母互不相同，每列的字母也互不相同，则不同的排列方法共有（）

A.12 种　　B.18 种　　C.24 种　　D.36 种

3.从 4 名男同学和 3 名女同学中选出 3 名参加某项活动，求男女生都有的选法种数.

4、3 名女生和 5 名男生排成一排.

（1）若女生全排在一起，有多少种排法？

（2）若女生都不相邻，有多少种排法？

（3）若女生不站两端，有多少种排法？

（4）其中甲必须排在乙左边（可不邻），有多少种排法？

（5）其中甲不站最左边，乙不站最右边，有多少种排法？

5、（1）国家教育部为了发展贫困地区教育，在全国重点师范大学免费培养教育专业师范生，毕业后要分到相应的地区任教.现有 6 个免费培养的教育专业师范毕业生要平均分到 3 所学校去任教，有________种不同的分派方法.

（2）某国际会议举行期间，为了保证安全，将 5 个安保小组全部安排到指定三个区域内工作，且这三个区域每个区域至少有一个安保小组，则这样的安排方法共有（）

A.96 种　　B.100 种　　C.124 种　　D.150 种

（3）将甲、乙等 5 名交警分配到三个不同路口疏导交通，每个路口至少一人，且甲、乙在同一路口的分配方案共有（）

A.18 种　　B.24 种　　C.36 种　　D.72 种

6.将 6 本不同的书分给甲、乙、丙、丁 4 个人，每人至少 1 本的不同分法共有________种.（用数字作答）

7.现有 10 个优秀学生指标分配给 6 个班级，每个班至少一个指标，则共有________种不同的分配方案.

13.2　二项式定理

1.二项式定理

（1）二项式定理：$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + \mathrm{C}_n^n b^n$ （n 为正整数）；

（2）通项公式：$T_{r+1} = \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r$，它表示第 $r+1$ 项；

（3）二项式系数：二项展开式中各项的系数 $\mathrm{C}_n^0, \mathrm{C}_n^1, \cdots, \mathrm{C}_n^n$.

2.二项式系数的性质

<table>
<tr><th>性质</th><th colspan="2">性质描述</th></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">与首末等距离的两个二项式系数相等，即 $\mathrm{C}_n^r = \mathrm{C}_n^{n-r}$</td></tr>
<tr><td>增减性</td><td>二项式系数 Cr</td><td>当 $r < \frac{n+1}{2}$ （n 为正整数）时，二项式系数是递增的</td></tr>
</table>

		当 $r > \frac{n+1}{2}$（n 为正整数）时，二项式系数是递减的
最大值	当 n 为偶数时，中间的一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值	
	当 n 为奇数时，中间的两项 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 和 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 相等，同时取得最大值	

3.各二项式系数和

（1）$(a+b)^n$ 展开式的各二项式系数和：$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

（2）偶数项的二项式系数的和等于奇数项的二项式系数的和，即 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

考点自测

1. $(1-2x)^4$ 展开式中第 3 项的二项式系数为________.

2.若 $(x-1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$，则 $a_0 + a_2 + a_4$ 的值为________.

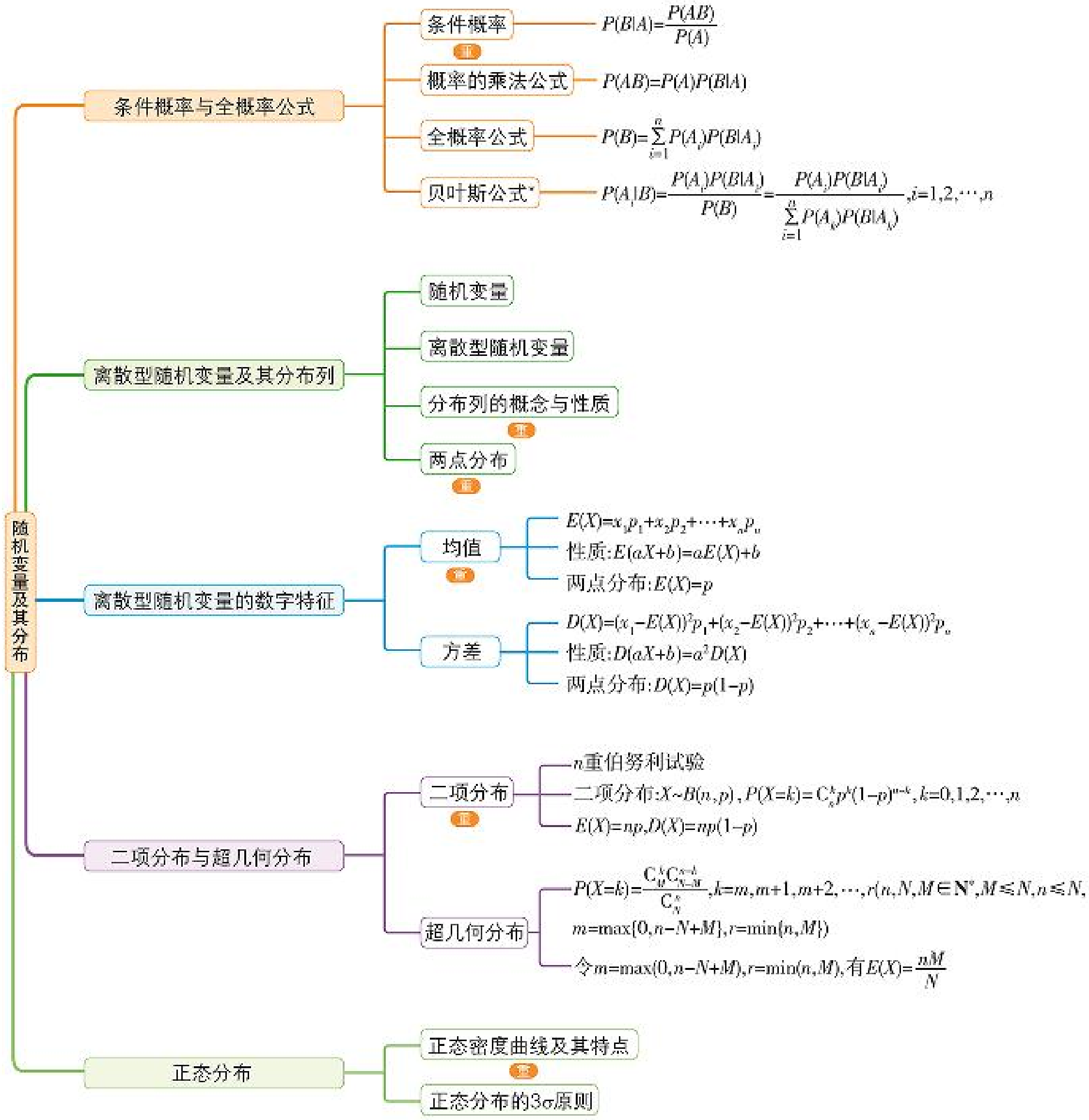
3. $\dfrac{C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 + \cdots + C_{2021}^{2021}}{C_{2022}^0 + C_{2022}^2 + C_{2022}^4 + \cdots + C_{2022}^{2022}}$ 的值为（）

A.1　　B.2　　C.2021　　D.2021×2022

4.二项式 $\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^5$ 的展开式中 x^3y^2 的系数是（）

A.5　　B.-20　　C.20　　D.-5

第十四章　概率与统计



14.1　随机现象、古典概率

一、随机事件的关系

1.随机试验

观察一定条件下发生的现象，通常叫做试验.事件的条件实现一次，称为一次试验.一个试验如果可以在相同的条件下重复进行；而且每次试验的结果可以不同，并且能事先明确试验的所有可能结果；进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，具有偶然性.我们就称它为随机试验，简称试验.

2.事件的关系与运算

样本空间：一个随机现象中依某个角度观察其所有可能出现（发生）的结果所组成的集合称为一个样本空间，用Ω表示，其中的元素称为基本事件或者样本点.

基本事件：一次试验连同其中可能出现的每一具体结果称为一个基本事件，通常试验的某一事件 A 由几个基本事件组成.

随机事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件.

必然事件：在一定条件下必然要发生的事件，记作Ω.

不可能事件：在一定条件下不可能发生的事件，记作$\varnothing$.

互斥事件：在同一次试验中，不可能同时发生的两个事件叫做互斥事件，也叫做互不相容事件.

对立事件：在一次试验中，如果两个互斥事件必然有一个发生，那么其中一个事件叫做另一个事件的对立事件.即设 A 和 B 互为对

立事件，满足（1） $A\bigcup B=\Omega$；（2） $A\bigcap B=\varnothing$.

二、频数、频率及经验概率

1.频数与频率：独立地重复一个伯努利试验 n 次，其中成功的次数记作 S_n，那么 $\frac{S_n}{n}$ 就被称为（n 次试验中）成功的频率.频率是一个数，依赖于试验次数 n.它不是一个确定的数，而是一个随机的数.

2.伯努利大数定律：独立地重复一个伯努利试验 n 次，当 n 很大时，频率 $\frac{S_n}{n}$ 逼近概率.

3.经验概率：频率在大数次的试验中稳定于某一常数（概率）这个事实非常重要.正因为如此，在实际中可以把频率作为概率（的估计值）来应用.频率也称为经验概率，计算它通常是为了估计概率 P.为了区别于概率，经验概率用 P 来表示.

三、随机事件的概率

1.概率的基本性质

（1）任何事件 A 的概率都在 0~1 之间，即 $0\le P(A)\le 1$.

（2）必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0.

2.概率的加法公式

（1）如果事件 A 与 B 互斥即 $A\bigcap B=\varnothing$，那么 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

（2）如果事件 A 与事件 B 互为对立事件，则 $A\bigcup B$ 为必然事件，$P(A\bigcup B)=1$ 且 $P(A)=1-P(B)$ 成立.

四、古典概率模型

1.古典概型

具有以下两个特点的概率模型叫做古典概率模型：

（1）有限多结果；

（2）等可能性.

2.古典概率

随机事件 A 是基本事件的某个集合，即样本空间的一个子集，用符号 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.其中，$|A|$ 表示事件 A 中的基本事件个数，而 $|\Omega|$ 表示样本空间中的基本事件个数.上式说明概率是事件中的元素个数与样本空间中元素个数的比值.

考点自测

1.为了实施“科技下乡，精准脱贫”战略，某县科技特派员带着 A，B，C 三个农业扶贫项目进驻某村，对仅有的四个贫困户甲、乙、丙、丁进行产业帮扶，若每个贫困户只能选择一个扶贫项目，每个项目至少有一户选择，则甲、乙两户选择同一个扶贫项目的概率为________.

变式与提高

1.若 m 是集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 中任意选取的一个元素，则椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$ 的焦距为整数的概率为________.

14.2　随机事件的独立性

1.如果事件 A 出现和事件 B 出现互相之间没有影响，即其中一个事件的发生对另一事件发生的概率没有影响，那么就称事件 A 和事件 B 互相独立.两个事件 A 与 B（相互）独立是指它们同时发生的概率等于它们各自发生概率的乘积，即 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

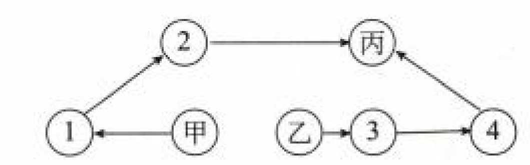
2.如果 A 与 B 是独立的，则 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是互相独立的.

考点自测

1.某企业有甲、乙两个研发小组，他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$.现安排甲组研发新产品 A，乙组研发新产品 B，设甲、乙两组的研发相互独立.则至少有一种新产品研发成功的概率为________.

2.如图，从甲地到丙地要经过两个十字路口（十字路口 1 与十字路口 2），从乙地到丙地也要经过两个十字路口（十字路口 3 与十字路口 4），设各路口信号灯工作相互独立，且在 1，2，

3，4 路口遇到红灯的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$.则一辆车从乙地到丙地至少遇到一个红灯的概率为________.



3.实验女排和育才女排两队进行比赛，在一局比赛中实验女排获胜的概率是$\frac{2}{3}$，没有平局.若采用三局两胜制，即先胜两局者获胜且比赛结束，则实验女排获胜的概率等于________.

4.每次试验的成功率为$p(0<p<1)$，重复进行 10 次试验，其中前 7 次都未成功，后 3 次都成功的概率为________.

5.如果$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，那么（）

A. $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$　　B. $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}\le P(A\cap B)\le\frac{3}{8}$

14.3　条件概率与相关公式

1.条件概率的公式

在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

2.乘法公式：$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

考点自测

1.某种疾病的患病率为 0.50，患该种疾病且血检呈阳性的概率为 0.49，则已知在患该种疾病的条件下血检呈阳性的概率为_________.

2.小智和电脑连续下两盘棋，已知小智第一盘获胜概率是 0.5，小智连续两盘都获胜的概率是 0.4，那么小智在第一盘获胜的条件下，第二盘也获胜的概率是_________.

3.某种灯泡的使用寿命为 2000 小时的概率为 0.85，超过 2500 小时的概率为 0.35，若某个灯泡已经使用了 2000 小时，那么它能使用超过 2500 小时的概率为_________.

4.现从 4 名男医生和 3 名女医生中抽取两人加入“援鄂医疗队”，用 A 表示事件“抽到的两名医生性别相同”，B 表示事件“抽到的两名医生都是女医生”，则$P(B|A)=$_________.

5.口袋中装有大小、形状相同的红球 2 个，白球 3 个，黄球 1 个，甲从中不放回地逐一取球，已知在第一次取得红球的条件下，第二次仍取得红球的概率为_________.

6.设 A，B 是两个事件，且 B 发生 A 必定发生，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，给出下列各式，

其中正确的是（）

A. $P(A\cup B)=P(B)$　　B. $P(B|A)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$

C. $P(A|B)=1$　　D. $P(A\cap B)=P(A)$

14.4　随机变量的分布与特征、常用分布

一、随机变量及其分布列

1.随机变量与分布列

（1）随机变量：一般地，对于随机试验样本空间Ω中任意给定的元素ω，都有唯一的实数$X(\omega)$与之对应，我们称X为随机变量.

（2）随机变量的分布：随机变量所有可能的取值以及相应的概率，称为随机变量的分布.

（3）当随机变量取所有值的概率均相等时，称它是等可能分布或均匀分布的，只取两个值的随机变量称为伯努利型，其分布称为伯努利分布.一个如下形式的图表被称为一个分布：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是互异的实数，$p_1,p_2,\cdots,p_n$是非负数，作为概率值，其总和为 1，即成立

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1.$$

2.期望

（1）定义：如果随机变量X的分布是$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$，那么它的期望定义为如下的加权平均：

$E[X]=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

（2）期望的线性性质

①如果X是一个随机变量，a是一个实数，那么$E[aX]=aE[X]$.

②如果X、Y是两个随机变量，那么$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.

3.方差

（1）我们用X与其期望的偏差的平方的期望，即$E[(X-E[X])^2]$来衡量随机变量X的分散度，称为X的方差，记为$D[X]$.其方差的计算公式：$D[X]=E[X^2]-(E[X])^2$.

（2）方差的性质

①如果 X 是一个随机变量，a 是一个实数，那么 $D[aX]=a^2D[X]$.

②如果 X、Y 分别是两个独立的随机试验所对应的随机变量，那么 $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$.

4.常用结论

若 $Y=aX+b$，其中 a，b 是常数，X 是随机变量，则

（1）$E\left[k\right]=k$，$D\left[k\right]=0$，其中 k 为常数；

（2）$E[aX+b]=aE[X]+b$，$D[aX+b]=a^2D[X]$；

（3）$E\left[X_1+X_2\right]=E\left[X_1\right]+E\left[X_2\right]$；

（4）$D[X]=E[X^2]-(E[X])^2$；

（5）若 X_1，X_2 相互独立，则 $E[X_1\cdot X_2]=E[X_1]\cdot E[X_2]$.

5.二项分布

（1）独立地重复一个成功概率为 p 的伯努利试验 n 次，其成功次数的分布称为二项分布，亦称成功次数 X 服从二项分布 $B(n,p)$；

（2）设 X 服从二项分布 $B(n,p)$，则 X 的期望为 np，方差为 $np(1-p)$.

6.超几何分布

（1）从一个装有大小与质地相同的 a 个白球、b 个黑球的袋中随机且不放回地取 n 个球，其中白球数的分布称为超几何分布；

（2）记白球个数为 X，则变量 X 的分布为：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ \dfrac{C_a^0C_b^n}{C_{a+b}^n} & \dfrac{C_a^1C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \cdots & \dfrac{C_a^kC_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \cdots & \dfrac{C_a^nC_b^0}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}$；

（3）设 X 服从超几何分布，则 $E[X]=\dfrac{na}{a+b}$.

7．正态分布曲线

1、正态密度函数

数学中的正态分布是指由下面的函数所表达的分布：$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

$x\in(-\infty,+\infty)$ 其中有两个参数：

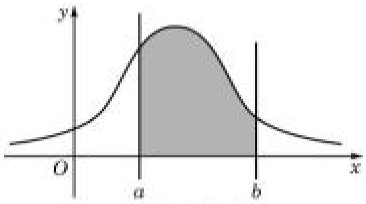
（1）μ 是该分布的期望或均值；

（2）σ^2 是该分布的方差，且总是假设 $\sigma>0$．这个函数的图像如同钟形，该函数在数学上称为正态密度函数，也称为钟形曲线.

2、正态分布

定义 设X是一个取实数值的随机变量. 如果对任何给定的实数a与 b（$a<b$），X落在区间(a,b)上的概率p（$a<X<b$）等于三条直线：$y=0$、$x=a$、$x=b$与正态密度函数$y=\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$的图像所围的区域面积（或者简称作此函数在该区间上的面积），那么X服从正态分布，或更准确地说，X 服从参数为μ、σ^2的正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

当$\mu=0$、$\sigma^2=1$时，相应的正态分布称为标准正态分布，记作$X\sim N(0,1)$，其密度函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，称为标准正态分布的密度函数，简记作$y=\varphi(x)$



$P(a<X<b)$

3．三个邻域

会用正态总体在三个特殊区间内取值的概率值结合正态曲线求随机变量的概率. 落在三个邻域之外是小概率事件，这也是对产品进行质量检测的理论依据.

考点自测

1.有 6 个大小相同的黑球，编号为 1，2，3，4，5，6，还有 4 个同样大小的白球，编号为 7，8，9，10，现从中任取 4 个球，有如下几种变量：①X表示取出的最大号码；②Y表示取出的最小号码；③取出一个黑球记 2 分，取出一个白球记 1 分，ξ表示取出的 4 个球的总得分；④η表示取出的黑球个数.这四种变量中服从超几何分布的是________.

2.已知随机变量X服从二项分布$B(n,p)$.若$E[X]=2$，$D[X]=\dfrac{4}{3}$，则p=（）

A.$\dfrac{3}{4}$　　B.$\dfrac{2}{3}$　　C.$\dfrac{1}{3}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

3.在n（n为正整数）次独立重复试验中，每次试验的结果只有A，B，C三种，且A，B，C三个事件之间两两互斥.已知在每一次试验中，事件A，B发生的概率均为$\dfrac{2}{5}$，则事件A，B，C发生次数的方差之比为（）

A.5：5：4　　B.4：4：3　　C.3：3：2　　D.2：2：1

4.我们知道，在n次独立重复试验（即伯努利试验）中，每次试验中事件A发生的概率为p，则事件A发生的次数X服从二项分布$B(n,p)$，事实上，在无限次伯努利试验中，另一个随

机变量的实际应用也很广泛，即事件 A 首次发生时试验进行的次数 Y，显然 $P(Y=k)=p(1-p)^{k-1}$，k=1，2，3，…，我们称 Y 服从“几何分布”，经计算得 $E[Y]=\dfrac{1}{p}$.由此推广，在无限次伯努利试验中，试验进行到事件 A 和 $\overline{A}$ 都发生后停止，此时所进行的试验次数记为 Z，则 $P(Z=k)=p(1-p)^{k-1}+(1-p)p^{k-1}$，$k$=2，3，…，那么 $E[Z]=$（）

A. $\dfrac{1}{p(1-p)}-1$　　B. $\dfrac{1}{p^2}$　　C. $\dfrac{1}{p(1-p)}+1$　　D. $\dfrac{1}{(1-p)^2}$

14.5　随机抽样

一、总体和样本

1.总体与个体：在统计问题中，我们把研究对象的全体叫做总体，总体中的每一个对象叫做个体，总体中所含个体的数量，称为总体的容量.从总体中抽取的一部分个体叫做这个总体的一个样本，样本所含个体的数量称为样本量，也称样本容量.

2.统计量：描述样本特征的概括性数字度量，称为统计量.可以用这些样本的统计量来推断总体的数字特征.

二、数据的获取

1.按照收集数据的不同方法，将数据分为观测数据和实验数据.观测数据是通过调查或观测而收集到的数据，是在没有对有关事物进行人为控制的条件下得到的；实验数据是指在实验中控制实验对象而收集到的数据.

2.普查：对总体的每个个体分别进行调查.

3.抽样：从总体中抽取样本的过程称为抽样.通过抽样进行调查研究的方法叫做抽样调查.

三、抽样方法

1.简单随机抽样：在抽样的过程中通过逐个抽取的方法抽取样本，且总体的每一个个体都有同样的可能性被选入样本，这种抽样方法叫做简单随机抽样.其方法有抽签法和随机数表法.

简单随机抽样的特点：

（1）总体个数 N 是有限的；

（2）是不放回抽样；

（3）总体中每个个体被选人样本的可能性相同.

2.分层随机抽样：一般地，当总体有差异明显的几个部分组成时，先把总体分成若干个部分，然后从不同的部分中独立、随机地抽取样本，这种抽样的方法称为分层随机抽样，简称分层抽样.

分层抽样的方法如下：先将容量为N的总体按要求分成k层，每层的个体数分别记作N_1，N_2，…，N_k；在每层中分别随机抽取n_1，n_2，…，n_k个个体组成容量为n的样本，使得$N=N_1+N_2+\cdots+N_k$，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$,$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_2}{N_2}=\cdots=\frac{n_k}{N_k}$.

考点自测

1.某市计划统计调查22~35岁青年的平均月开支占收入的比例.通过科学抽样获取了2600位青年的月开支占收入的比例.在该问题中：

（1）样本量为________；

（2）样本是____.

2.某集团有老年职工270人，中年职工540人，青年职工810人.为了更好地调查他们的健康情况，需从所有职工中抽取一个容量为36的样本，应采用的抽样方法是________分层抽样.（用“简单随机抽样”或“分层抽样”填空）

3.我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石.验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为________石.（精确到整数）

4.从50件产品中随机抽取10件进行抽样.利用随机数表抽取样本时，将50件产品按01，02，03，…，50进行编号，如果从随机数表的第1行，第6列开始，从左往右依次选取两个数字，则选出来的第4个个体编号为（）

70 29 17 12 15　　40 33 20 38 26

13 89 51 03 74　　17 76 37 13 04

07 74 21 19 30　　56 62 18 37 35

A.03　　B.32　　C.38　　D.10

5.交通管理部门为了解机动车驾驶员（简称驾驶员）对某新法规的知晓情况，对甲、乙、丙、丁四个社区做分层随机抽样调查，假设四个社区驾驶员的总人数为N，其中甲社区有驾驶员96人.若在甲、乙、丙、丁四个社区抽取驾驶员的人数分别为12，21，25，43，则这四个社区驾驶员的总人数N为（）

A.101　　B.808　　C.1212　　D.2012

6.某医院从开始设计到建成完工后，记者要对部分参与人员采访.决定从300名机械车操控人员，160名管理人员和240名工人中按照分层抽样的方法抽取35人.

（1）求这些人中每个人被抽到采访的概率；

（2）求从工人中抽取的人数.

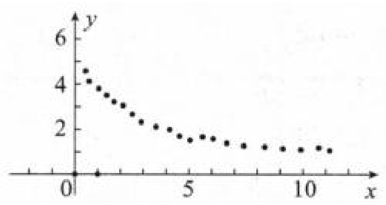
14.6　统计图表

1.茎叶图:解读茎叶图和解读直方图一样,要注意整体形态.茎叶图既可以用于呈现单组数据，也可以用于对两组同类数据的比较分析.

2.散点图：描述两变量间的因果关系.

考点自测

1.下图是一组实验数据得到的散点图，以下函数中适合作为 y 与 x 的回归方程的是（）



A. $y=ax+b$　　B. $y=b\cdot(x+a)^2+c$　　C. $y=b\cdot\log_a x+c$　　D. $y=b\cdot a^x+c$

2.有下列三个命题：

①分层抽样中，每个个体被抽到的可能性与层数及分层有关；

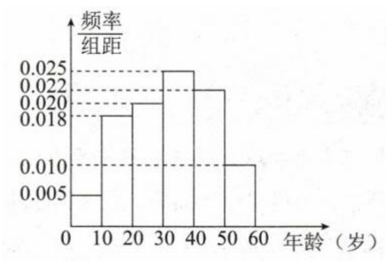
②散点图是判断两个变量是否相关的一种重要方法和手段；

③在频率分布直方图中，各小矩形的面积之和为 1.

其中为真命题的是（）

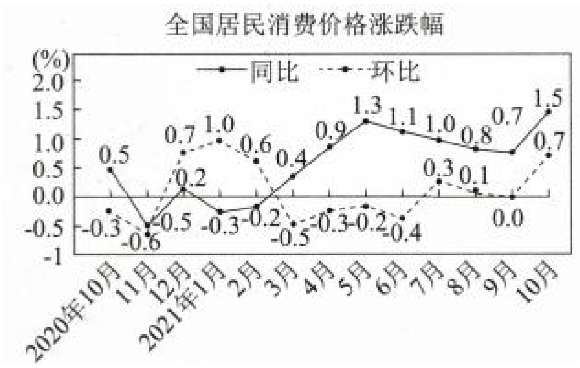
A.①②　　B.①③　　C.②③　　D.①②③

3.某市为了解市民对机动车单双号限行的看法，随机调查了一部分市民，其年龄（岁）统计结果如下，则这组数据的中位数为（）



A.30　　B.32.8　　C.35.6　　D.40

4.下图是国家统计局 2021 年 11 月发布的全国居民消费价格的涨跌幅情况，现有如下说法：



①2021 年 10 月份，全国居民消费价格的同比和环比均呈现增长趋势；

②2020 年 10 月至 2021 年 10 月，全国居民消费价格同比增长的月份个数是下跌的 5 倍；

③从 2020 年 10 月至 2021 年 10 月中任取 2 个月，全国居民消费价格的同比均呈现增长的概率为 $\frac{15}{26}$.

上述说法正确的个数为（）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

5.如图是某赛季两位篮球运动员最近 10 场比赛中各自得分的茎叶图，两人的平均得分分别为 $\overline{x}_{甲}$、$\overline{x}_{乙}$.则下列结论正确的是（）

甲		乙
9 7 4 4 4 3 2 1	1	0 9
2 0	2	0 1 2 2 4 6
	3	5 8

A. $\overline{x}_{甲} < \overline{x}_{乙}$，甲比乙稳定　　B. $\overline{x}_{甲} < \overline{x}_{乙}$，乙比甲稳定

C. $\overline{x}_{甲} > \overline{x}_{乙}$，甲比乙稳定　　D. $\overline{x}_{甲} > \overline{x}_{乙}$，乙比甲稳定

14.7　统计估计

1.通过样本估计总体的集中趋势：

样本平均数 $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$；

通过样本估计总体的离散程度：

样本方差 $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$，

样本标准差 $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$.

2.估计百分位数

第 k 百分位数（k 为 1 到 100 之间的整数，记作 Pk）即是将一组数据从小到大排列后，将数据分成两部分：小于或等于第 k 百分位数的数据占 k%，大于或等于第 k 百分位数的数据占 $(100-k)$ %.

考点自测

1.某市共青团委统计了甲、乙两名同学近十期“青年大学习”答题得分情况，整理成如图所示的茎叶图.则下列说法中正确的是________.

甲		乙
7 8	2	9 8
9 1	3	4 5
2 5	4	8 2 8
5 8 5	5	3 5
6	6	7

①甲得分的 30%分位数是 31；

②乙得分的众数是 48；

③甲得分的中位数小于乙得分的中位数；

④甲得分的极差等于乙得分的极差.

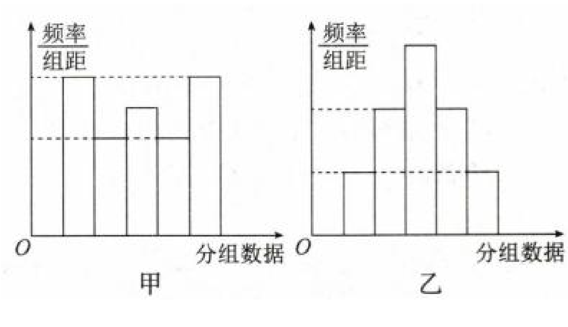
2.某单位为了解该单位党员开展学习党史知识活动情况，随机抽取了部分党员，对他们一周的党史学习时间进行了统计，统计数据如下表所示：

党史学习时间（小时）	7	8	9	10	11
党员人数	6	10	9	8	7

则该单位党员一周学习党史时间的众数及第 40 百分位数分别是（）

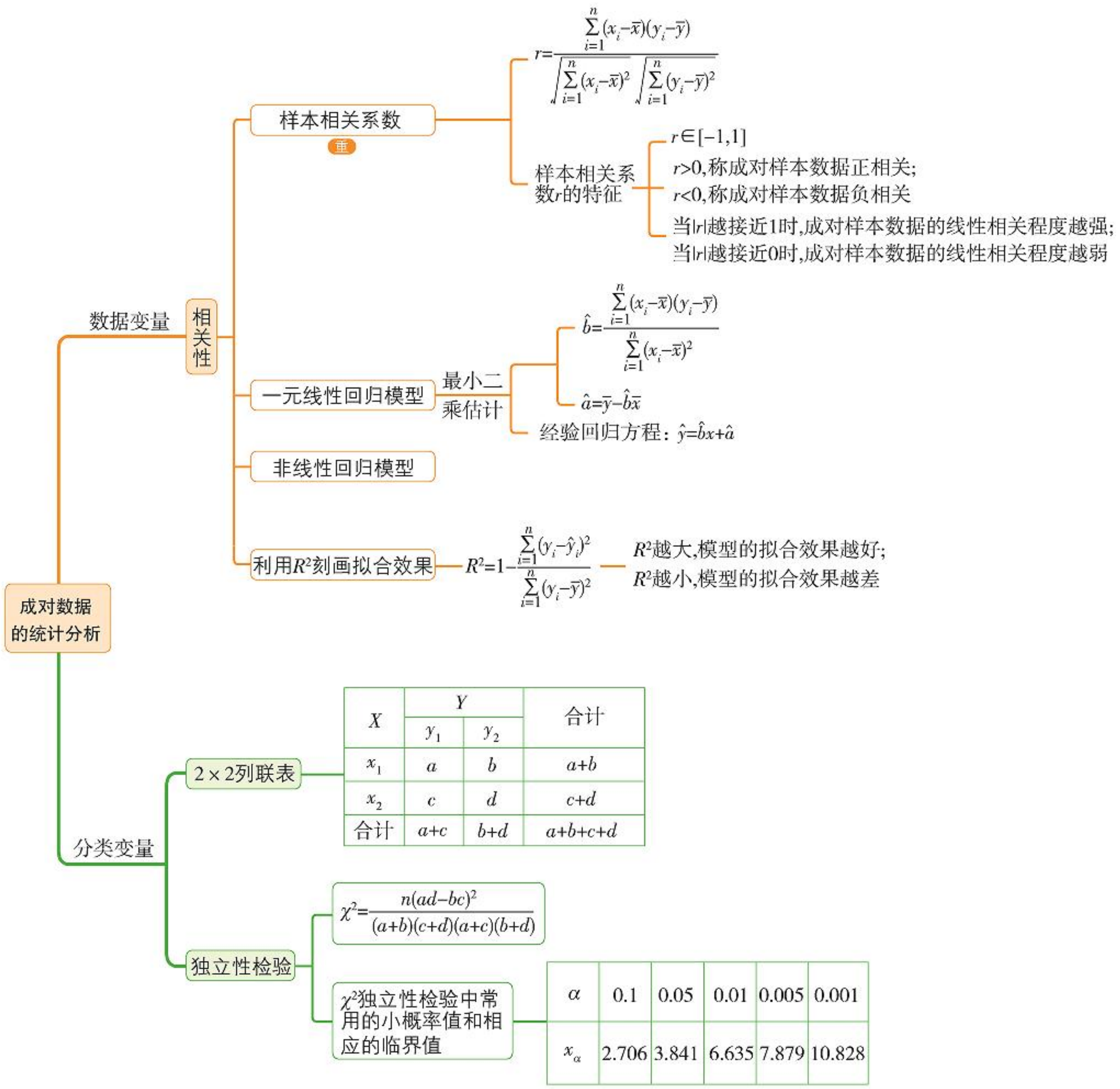
A.8，8.5　　B.8，8　　C.9，8　　D.8，9

3.甲，乙两组数据的频率分布直方图如图所示，两组数据采用相同的分组方法，用 $\overline{x}_1$ 和 $\overline{x}_2$ 分别表示甲、乙的平均数，s_1^2，s_2^2 分别表示甲、乙的方差，则（）



A. $\overline{x}_1=\overline{x}_2$，$s_1^2<s_2^2$　　B. $\overline{x}_1=\overline{x}_2$，$s_1^2>s_2^2$　　C. $\overline{x}_1<\overline{x}_2$，$s_1^2=s_2^2$　　D. $\overline{x}_1>\overline{x}_2$，$s_1^2=s_2^2$

第十五章　成对数据的统计分析



15.1、变量间的相关关系

1、变量之间的相关关系

两个变量之间的关系可能是确定的关系（如：函数关系），或非确定性关系．当自变量取值一定时，因变量也确定，则为确定关系；当自变量取值一定时，因变量带有随机性，这种变量之间的关系称为相关关系．相关关系是一种非确定性关系，如长方体的高与体积之间的关系就是确定的函数关系，而人的身高与体重的关系，学生的数学成绩好坏与物理成绩的关系等都是相关关系．

2、线性相关和非线性相关：

两个变量之间的相关关系又可分为线性相关和非线性相关，如果所有的样本点都落在某一函数曲线的附近，则变量之间具有相关关系（不确定性的关系），如果所有样本点都落在某一直线附近，那么变量之间具有线性相关关系，相关关系只说明两个变量在数量上的关系，不表明他们之间的因果关系，也可能是一种伴随关系.

3、两个变量相关关系与函数关系的区别和联系

（1）相同点：两者均是两个变量之间的关系.

（2）不同点：函数关系是一种确定的关系，如匀速直线运动中时间 t 与路程 s 的关系，相关关系是一种非确定的关系，如一块农田的小麦产量与施肥量之间的关系，函数关系是两个随机变量之间的关系，而相关关系是非随机变量与随机变量之间的关系；函数关系式一种因果关系，而相关关系不一定是因果关系，也可能是伴随关系.

二、相关系数

两组数据 x_i 和 y_i 的线性相关系数是度量两个变量 x 与 y 之间线性相关程度的统计量，其计算公式为 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$ 其中，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，它们分别是这两组数据的算术平均数。

三、相关系数 r 的性质

①当 $r>0$ 时，称成对样本数据正相关;当 $r<0$ 时，成对样本数据负相关；当 $r=0$ 时，成对样本数据间没有线性相关关系.

②样本相关系数 r 的取值范围为 $[-1,1]$

当 $|r|$ 越接近 1 时，成对样本数据的线性相关程度越强;

当 $|r|$ 越接近 0 时，成对样本数据的线性相关程度越弱.

四、一元线性回归模型参数的最小二乘法

（1）经验回归方程的求解法：最小二乘法

回归直线方程过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$，是回归直线方程最常用的一个特征；

我们将 $\hat{y}=\hat{a}x+\hat{b}$ 称为 Y 关于 x 的线性回归方程，也称经验回归函数或经验回归公式，其图形称为经验回归直线。这种求经验回归方程的方法叫做最小二乘法，求得的 $\hat{b},\hat{a}$，叫做 b，a 的最小二乘估计,其中 $\hat{a}$ 称为回归系数，它实际上也就是经验回归直线的斜率，$\hat{b}$ 为截距.

用最小二乘法求回归方程是为了使$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^2$ 最小

其中$\begin{cases}\hat{a}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\\ \hat{b}=\overline{y}-\hat{a}\overline{x}\end{cases}$

15.2、分类变量与列联表

(1)分类变量

为了方便,会使用一种特殊的随机变量,区别不同的现象或性质,这随机变量称为分类变量.

(2) 2×2 列联表

①2×2 列联表给出了两个分类变量数据的交叉分类频数.

②定义一对分类变量 X 和 Y，我们整理数据如下表所示：

X	Y		合计
	y_1	y_2	
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

15.3、独立性检验

(1)独立性检验定义:

利用 χ^2 的取值推断分类变量 X 和 Y 是否独立的方法称为 χ^2 独立性检验，读作"卡方独立性检验". 简称独立性检验.

(2)独立性检验公式:

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n=a+b+c+d$ （注意使用公式时分子的平方不要忽略了）

3、零假设

要检验两个随机变量是否有关，统计上一般先假设它们没有关系，即相互独立，再进行统计检验. 这种假设称为原假设，也称为零假设，习惯上用 H_0 表示；

【说明】2×2 列联表独立性检验通常有如下步骤:

（1）提出两个随机变量没有关系的原假设 H_0;

（2） 确定显著性水平α，本书中规定α＝0.05，也即摩（$\chi^2\geq3.841$）≈0.05

（3） 计算统计量χ^2 的值.

（4） 统计决断：比较上述χ^2 值与 3.841 的大小，若χ^2 值≥3.841，则拒绝（或否定）犁 0；

若χ^2 值<3.841，则不能拒绝（或否定）H_0，即接受 H_0；根据上述推断作出结论

考点自测

1、为加强素质教育，使学生各方面全面发展，某学校对学生文化课与体育课的成绩进行了调查统计，结果如表：

	体育课不及格	体育课及格	合计
文化课及格	57	221	278
文化课不及格	16	43	59
合计	73	264	337

在对体育课成绩与文化课成绩进行独立性检验时，根据以上数据可得到χ^2 的值为(　　)

A．1.255　　B．38.214

C．0.003 7　　D．2.058

【说明】2×2 列联表是 4 行 4 列，计算时要准确无误，关键是对涉及的变量分清类别；

2、为了解某大学的学生是否喜欢体育锻炼，用简单随机抽样方法在校园内调查了 120 位学生，得到如下 2×2 列联表：

	男	女	合计
喜欢	a	b	73
不喜欢	c	25	
合计	74		

则 $a-b-c$ 等于(　　)

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

【说明】本题属于列联表与χ^2 的计算；

3、甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营．为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

（1）根据上表，分别估计这两家公司在甲、乙两城之间长途客车准点的概率；

（2）能否根据小概率值α＝0.1 的独立性检验，分析甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01
x_α	2.706	3.841	6.635